

ÜBER DEN $\mathcal{C}$ -ZUSAMMENHANG UND SEINE LOKALISATION

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Gerhard Preuß

aus Berlin

1967

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

ÜBER DEN $\mathbb{C}$ -ZUSAMMENHANG UND SEINE LOKALISATION

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Gerhard Preuß

aus Berlin

1. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer

2. Referent: Professor Dr. G. Ringel

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Nov. 1967

Tag der Promotion: 18. Dez. 1967



Meiner über alles geliebten Mutter
in dankbarer Erinnerung



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550823_0056

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I: $\mathcal{C}$ - zusammenhängende und lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Objekte in den Kategorien der topologischen und uniformen Räume ..	10
§ 1 $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Objekte	10
1. Definition und äquivalente Charakterisierung	10
2. Morphismen und Komponentenerlegung	10
3. Strukturen	13
§ 2 $\mathcal{C}$ - diskontinuierliche Objekte	14
1. Definition	14
2. Beziehungen zur Kategorie der $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Objekte und zu anderen Kategorien	14
3. Strukturen	17
§ 3 Komponentenkategorien	18
§ 4 Lokale $\mathcal{R}$ - Objekte	20
1. Definition und äquivalente Charakterisierungen	20
2. Komponenten, Überdeckungen und spezielle Morphismen	21
3. Strukturen	23
Kapitel II: $\mathcal{C}$ - zusammenhängende und lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Räume ...	25
Vorbereitungen	25
§ 1 $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Räume	29
1. Zur Definition äquivalente Charakterisierungen	29
2. Klassifikation der $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Räume	34
3. $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten	35
4. Initiale Topologien	38
5. Finale Topologien	41

6.	Charakterisierung der Klasse der $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Räume	43
7.	Beispiele $\mathcal{R}$ - zusammenhängender Räume	45
§ 2	$\mathcal{C}$ - diskontinuierliche Räume	48
1.	Zur Definition äquivalente und universelle Charakterisierungen	48
2.	Klassifikation der $\mathcal{C}$ - diskontinuierlichen Räume	51
3.	Initiale Topologien	51
4.	Finale Topologien	52
§ 3	Beziehungen zwischen den Klassen der $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden, $\mathcal{C}$ - diskontinuierlichen, $\mathcal{C}$ - regulären, $\mathcal{C}$ - normalen und $\mathcal{C}$ - kompakten Räume	53
§ 4	Lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Räume	57
1.	Zur Definition äquivalente Charakterisierungen	57
2.	Klassifikation der lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Räume	59
3.	$\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten	61
4.	Initiale Topologien	62
5.	Finale Topologien	64
Literatur		67

Einleitung

0.1 Uniform zusammenhängende Räume

Bekanntlich kann der Zusammenhangsbegriff in der Topologie wie folgt definiert werden: Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von X in einen diskreten Raum konstant ist. Davon ausgehend haben 1964 MROWKA und PERVIN [14] auf ähnliche Weise für uniforme Räume einen Zusammenhangsbegriff angegeben. Nach ihrer Definition heißt ein uniformer Raum X uniform zusammenhängend, wenn jede gleichmäßig stetige Abbildung von X in einen diskreten Raum konstant ist. So ist z.B. die mit der gewöhnlichen uniformen Struktur versehene Menge der rationalen Zahlen uniform zusammenhängend.

0.2 R - zusammenhängende Räume

Wählt man z.B. im topologischen Fall anstelle eines diskreten Raumes einen anderen topologischen Raum, etwa den Raum R der reellen Zahlen, und definiert einen topologischen Raum X als R - zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von X in R konstant ist, so erhält man eine echte Unterklasse der Klasse der zusammenhängenden Räume. R - zusammenhängende Räume sind von verschiedenen Autoren angegeben worden. So sind R - zusammenhängende Räume, die dem T_2 -Axiom genügen, jedoch nicht dem Urysohnschen Trennungssaxiom, 1925 von URYSOHN [19] und 1937 von POSPISIL [17] konstruiert worden. Reguläre R - zusammenhängende Räume haben 1946 HEWITT [11], 1948 NOVAK [16] und 1951 VAN EST und FREUDENTHAL [5] angegeben. Da es, abgesehen von einpunktigen Räumen, keine vollständig regulären R - zusammenhängenden Räume gibt (vgl. Kap. II, Satz 2.7), ist es das besondere Verdienst von HEWITT [11], als erster 1946 gezeigt zu haben, daß es reguläre R - zusammenhängende Räume gibt, die nicht trivial sind. Dabei sind z.T. Methoden von TYCHONOFF [18] zur Anwendung gekommen.

0.3 $\mathcal{C}$ - zusammenhängende und uniform $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Räume

Legt man nun nicht einen einzelnen topologischen bzw. uniformen Raum zugrunde für die Definition des Zusammenhangsbegriffes, sondern eine ganze Klasse $\mathcal{C}$ topologischer bzw. uniformer Räume, so gelangt man zum Begriff des $\mathcal{C}$ - Zusammenhangs bzw. uniformen

$\mathcal{C}$ -Zusammenhangs. Dieser Ansatz ist natürlicher; denn tatsächlich hängt der Zusammenhangsbegriff nicht ab von den speziellen Eigenschaften eines einzelnen Raumes; vielmehr gibt es verschiedene Klassen, die denselben Zusammenhangsbegriff erzeugen (vgl. Kap. I, Satz 2.6). Zugleich aber ist eine gemeinsame Behandlung etwa der $\mathcal{R}$ -zusammenhängenden und zusammenhängenden Räume möglich.

0.4 Bemerkung

Ähnliche Überlegungen haben HERRLICH [9] 1965 veranlaßt, für Klassen $\mathcal{C}$ von T_2 -Räumen den Begriff des $\mathcal{C}$ -kompakten Raumes einzuführen und damit die Theorie der von ENGELKING und MROWKA [4] untersuchten E-kompakten Räume zu verallgemeinern. Der Begriff "E-kompakt" wurde 1958 von MROWKA [15] eingeführt.

0.5 $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Objekte

Es wäre jedoch Stückwerk, wollte man die Theorien der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden und uniform $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Räume getrennt behandeln. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine gemeinsame Theorie entwickelt, die alle genannten Zusammenhangsbegriffe als Spezialfälle enthält. Für die Darstellung bietet sich die Sprache der kategorialen Mathematik an. Unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{C}$ eine der Kategorien $\mathcal{U}$ (Kategorie der uniformen Räume) oder $\mathcal{T}$ (Kategorie der topologischen Räume) ist, heißt ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ bzgl. einer Unterkategorie $\mathcal{E}$ von $\mathcal{C}$ $\mathcal{E}$ -zusammenhängend (in $\mathcal{C}$), wenn die Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, E)$ der Morphismen von X in E für jedes $E \in \mathcal{E}$ nur aus konstanten Morphismen besteht (Kap. I, Definition 1.1). Viele Ergebnisse aus der Theorie der gewöhnlichen zusammenhängenden Räume lassen sich übertragen. Es werden folgende Sätze bewiesen:

- 1) Das Bild eines $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objektes unter einem Morphismus ist $\mathcal{E}$ -zusammenhängend (Kap. I, Satz 1.2).
- 2) Die Vereinigung eines ketten verbundenen Systems $\mathcal{E}$ -zusammenhängender Unterobjekte eines Objektes $X \in \mathcal{C}$ ist $\mathcal{E}$ -zusammenhängend (Kap. I, Satz 1.3).
- 3) Jedes $X \in \mathcal{C}$ besitzt maximale $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Unterobjekte, sogenannte $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten, die den folgenden Eigenschaften genügen:

a) Jeder Punkt $x \in X$ und jedes $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Unterobjekt von X liegen in einer $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente.

b) Sind K_1 und K_2 $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten von X , die nicht disjunkt sind, so gilt $K_1 = K_2$. (Kap. I, Lemma 1.1, Definition 1.3, Satz 1.4).

4) Die Aussage "Ist ein Unterobjekt M von $X \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C}$ -zusammenhängend, so ist auch die abgeschlossene Hülle M^- von M $\mathcal{C}$ -zusammenhängend" ist genau dann gültig, wenn $\mathcal{C}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten^{*)} ist (Kap. I, Satz 1.5).

5) Falls $\mathcal{C}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten ist, gilt: Ein Produkt von Objekten aus $\mathcal{C}$ ist genau dann $\mathcal{C}$ -zusammenhängend, wenn jeder Faktor $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist (Kap. I, Satz 1.6).

Wählt man $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$, so erhält man weiter folgende Ergebnisse:

6) a) Jeder Quotientenraum eines $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Raumes ist $\mathcal{C}$ -zusammenhängend (Kap. II, Satz 1.18).

b) Ist X ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation in X , der Quotientenraum X/R $\mathcal{C}$ -zusammenhängend und jede Äquivalenzklasse von X (bzgl. R) $\mathcal{C}$ -zusammenhängend, so ist X $\mathcal{C}$ -zusammenhängend. (Kap. II, Satz 1.19).

7) Der induktive Limes $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Räume ist $\mathcal{C}$ -zusammenhängend (Kap. II, Satz 1.21).

8) Das Infimum einer Menge $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$ ist eine $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Topologie auf X (Kap. II, Satz 1.20).

9) Unter Verwendung eines Satzes von HERRLICH [10] erhält man das folgende Resultat, das ein Ergebnis von HEWITT [11] für R -zusammenhängende Räume verallgemeinert:

Die Klasse der $\{Y\}$ -zusammenhängenden Räume, wobei Y ein T_1 -Raum ist, enthält einen mindestens zweipunktigen regulären Raum (Kap. II, Satz 3.6).

10) Schließlich wird für eine Klasse $\mathcal{C}$ von T_1 -Räumen eine axiomatische Charakterisierung der Klasse der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Räume gegeben:

*) " T_1 -Objekt" bedeutet für $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$ " T_1 -Raum" und für $\mathcal{C} = \mathfrak{U}$ "Uniformer T_1 -Raum".

Theorem 1.22(Kap. II): Zu einer Klasse $\mathcal{R}$ topologischer Räume gibt es genau dann eine Klasse $\mathcal{E}$ topologischer T_1 -Räume mit $\mathcal{R} = \mathcal{E}^+$ ($\mathcal{E}^+$ bedeutet Klasse der $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Räume), wenn gilt:

- 1) Sind X, Y topologische Räume, $f \in C(X, Y)$ und $X \in \mathcal{R}$, so gilt $f[X] \in \mathcal{R}$.
- 2) Ist $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, so ist $\mathfrak{M} = \{M \mid M \subset X \text{ und } M \in \mathcal{R}\} \neq \{\emptyset\}$ und $(\mathfrak{M}, \subset)$ induktiv geordnet.
- 3) Ist X ein topologischer Raum und sind A und B nicht disjunkte, zu $\mathcal{R}$ gehörige Unterräume von X , so gilt $A \cup B \in \mathcal{R}$.
- 4) Ist X ein topologischer Raum und A ein zu $\mathcal{R}$ gehöriger Unterraum von X , so gilt $A^- \in \mathcal{R}$.
- 5) Ist X ein topologischer Raum, R eine Faserung von X nach maximalen Teilmengen M mit $M \in \mathcal{R}$ und $M^* \subset X/R$ mit $M^* \in \mathcal{R}$ und $M^* \neq \emptyset$, so ist M^* einpunktig.

0.6 $\mathcal{E}$ -diskontinuierliche Objekte

Die Kategorie $D\mathcal{E}$ der $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Objekte von $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} = \mathcal{U}$ oder $\mathcal{E} = \mathcal{I}$) ist definiert als Unterkategorie derjenigen Objekte von $\mathcal{E}$, deren $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten einpunktig sind. Offenbar ist der Begriff des $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Objekts eine Verallgemeinerung des Begriffs des total diskontinuierlichen Raumes. Als weitere Spezialfälle sind die Theorien der T_1 -Räume und der uniformen T_1 -Räume in der Theorie der $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Objekte enthalten. Man erhält die Ergebnisse (Kap. I, Satz 2.8):

- 1) Das Produkt $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher Objekte ist $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich.
- 2) Der projektive Limes $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher Objekte ist $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich.
- 3) Jedes Unterobjekt eines $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Objekts ist $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich.
- 4) Das Supremum $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher (topologischer bzw. uniformer) Strukturen auf einer Menge $X \neq \emptyset$ ist eine $\mathcal{E}$ -diskontinuierliche (topologische bzw. uniforme) Struktur ($\mathcal{E} \subset \mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$).

Wählt man $\mathcal{E} = \mathcal{I}$, so erhält man weiter:

- 5) Die topologische Summe $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher Räume ist $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich (Kap. II, Satz 2.10).

6) Die Verallgemeinerung einer universellen Konstruktion von BOURBAKI [2]

liefert für Klassen $\mathcal{C}$ von T_1 -Räumen :

Jedem topologischen Raum kann ein universeller $\mathcal{C}$ -diskontinuierlicher Raum zugeordnet werden (Kap. II, Satz 2.3).

0.7 Beziehungen zwischen den Klassen der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden, $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen, $\mathcal{C}$ -regulären, $\mathcal{C}$ -normalen und $\mathcal{C}$ -kompakten Räume

Bezeichnet man für eine Unterkategorie $\mathcal{R}$ von $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{U}$ oder $\mathcal{C} = \mathcal{T}$) mit $\mathcal{R}^-$ die Kategorie derjenigen Objekte X aus $\mathcal{R}$, für die $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(K, X)$ nur aus konstanten Morphismen besteht für alle $K \in \mathcal{R}$ und mit $\mathcal{R}^+$ die Kategorie der $\mathcal{R}$ -zusammenhängenden Objekte, so gilt :

1) a) Für jede Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ ist

$$D\mathcal{C} = (\mathcal{C}^+)^-,$$

d.h. die Klasse der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Objekte läßt sich aus der Klasse der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte berechnen (Kap. I, Satz 2.1).

b) Für jede Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ ist

$$(D\mathcal{C})^+ = \mathcal{C}^+,$$

d.h. die Klasse der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte läßt sich aus der Klasse der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Objekte berechnen. Zugleich ist $D\mathcal{C}$ charakterisiert als größte Klasse $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{D}^+ = \mathcal{C}^+$ (Kap. I, Satz 2.4).

2) Sind $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Unterkategorien von $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, so gilt $\mathcal{C}_1^+ \supset \mathcal{C}_2^+$ und $\mathcal{C}_1^- \supset \mathcal{C}_2^-$ (Kap. I, Satz 2.2).

Insbesondere sind die Aussagen $D\mathcal{C} \subset D\mathcal{D}$ und $\mathcal{C}^+ \supset \mathcal{D}^+$ äquivalent ($\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$). Je "kleiner" also die Klasse der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte gewählt wird, desto "größer" ist die Klasse der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Objekte und umgekehrt.

3) Es sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$. Ist dann eine Kategorie $\mathcal{D}$ gegeben mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset D\mathcal{C}$, so gilt $\mathcal{C}^+ = \mathcal{D}^+$ und $D\mathcal{C} = D\mathcal{D}$ (Kap. I, Satz 2.6).

Wählt man $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ und bezeichnet die von HERRLICH [9] eingeführten Klassen

der $\mathfrak{C}$ -kompakten, $\mathfrak{C}$ -normalen und $\mathfrak{C}$ -regulären Räume der Reihe nach mit $K\mathfrak{C}$, $N\mathfrak{C}$ und $R\mathfrak{C}$, so gilt für eine Klasse $\mathfrak{C}$ von T_2 -Räumen (Kap. II, Satz 2.7):

$$\mathfrak{C} \subset K\mathfrak{C} \subset N\mathfrak{C} \subset R\mathfrak{C} \subset D\mathfrak{C}$$

und aus 3) folgt

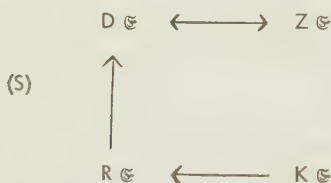
$$3) \quad (K\mathfrak{C})^+ = (N\mathfrak{C})^+ = (R\mathfrak{C})^+ = \mathfrak{C}^+$$

und

$$D(K\mathfrak{C}) = D(N\mathfrak{C}) = D(R\mathfrak{C}) = D\mathfrak{C},$$

d.h. aus jeder der Klassen $K\mathfrak{C}$, $N\mathfrak{C}$ und $R\mathfrak{C}$ lassen sich die Klassen der $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden und $\mathfrak{C}$ -diskontinuierlichen Räume berechnen (Kap. II, Satz 3.1).

- 4) Berücksichtigt man die Beziehung $R(K\mathfrak{C}) = R\mathfrak{C}$ (vgl. [9]) und bezeichnet man die Klasse $\mathfrak{C}^+$ der $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden Räume mit $Z\mathfrak{C}$, so bestimmen sich die Klassen $K\mathfrak{C}$, $R\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{C}$ und $Z\mathfrak{C}$ nach folgendem Schema:



Aus der Klasse $D\mathfrak{C}$ läßt sich nicht die Klasse $R\mathfrak{C}$ bestimmen; durch ein Beispiel wird gezeigt, daß es Klassen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ gibt mit $D\mathfrak{C} = D\mathfrak{F}$, aber $R\mathfrak{C} \neq R\mathfrak{F}$ (Kap. II, Beispiel 3.1). Durch das Schema (S) wird eine Beziehung hergestellt zwischen den Zusammenhangsbegriffen und denjenigen Begriffen der Topologie, die mit Trennungsaxiomen in Verbindung stehen.

- 5) Erwähnt sei noch das folgende Problem: Bezeichnet man mit D_2 einen diskreten Raum aus zwei Punkten, so läßt sich der bekannte Satz, daß ein kompakter Raum genau dann nulldimensional ist, wenn er total diskontinuierlich ist, wie folgt formulieren:

Satz: Es sei $\mathcal{C} = \{D_2\}$ und X kompakt. X ist genau dann $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich, wenn X $\mathcal{C}$ -regulär ist.

Der Satz bleibt gültig für solche Klassen $\mathcal{C}$ von T_2 -Räumen, für die entweder

- a) $\mathcal{C}$ eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist oder
- b) $\mathcal{C}$ die Eigenschaft besitzt, daß ein Produkt von Räumen aus $\mathcal{C}$ einen Bogen als Unterraum besitzt. (Kap. II, Satz 3.4).

Es ist nicht bekannt, ob der Satz für beliebige Klassen $\mathcal{C}$ von T_2 -Räumen erhalten bleibt.

0.8 Komponentenkategorien

Eine Komponentenerlegung läßt sich nicht nur für die Kategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte, sondern auch für die Kategorie der irreduziblen oder der wegzusammenhängenden Räume durchführen. Deshalb erweist es sich als zweckmäßig, den Begriff der Komponentenkategorie als Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{U}$ oder $\mathcal{C} = \mathcal{T}$) einzuführen. $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ heißt **Komponentenkategorie**, wenn gilt:

- a) Das Bild eines Objektes $X \in \mathcal{K}$ unter einem Morphismus gehört zu $\mathcal{K}$.
- b) Für jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ mit $X \neq \emptyset$ ist die Menge der zu $\mathcal{K}$ gehörigen Teilmengen von X nicht leer und induktiv geordnet (bzgl. der Inklusion).

Bezeichnet man maximale zu $\mathcal{K}$ gehörige Unterobjekte eines Objektes $X \in \mathcal{K}$ als **Komponenten von X** bzgl. $\mathcal{K}$, so erhält man die Ergebnisse:

- 1) Eine Komponentenkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ ist genau dann Unterkategorie der Kategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte (in $\mathcal{C}$), wenn $\mathcal{C}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{C}$ ist, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{K}$ einpunktig sind (Kap. I, Satz 3.1).

Dadurch ist insbesondere die Frage gelöst, wie $\mathcal{C}$ zu wählen ist, damit die irreduziblen oder die wegzusammenhängenden Räume zur Kategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Räume gehören und die Begriffe "Zusammenhang" und " $\mathcal{C}$ -Zusammenhang" koinzidieren.

- 2) Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ von Objekten aus $\mathcal{C}$ gilt $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ bzgl. einer Komponentenkategorie $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ genau dann, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie aller Objekte aus $\mathcal{C}$ ist, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{K}$ einpunktig sind (Kap. I, Satz 3.2').

Da jede Kategorie der Form $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{U}$ oder $\mathcal{C} = \mathcal{T}$) abgeschlossen ist,

gegenüber Bildung von Unterobjekten, Produkten, projektiven Limites und Suprema (Kap. I, Satz 2.8), gelten die aufgeführten Eigenschaften nicht nur für die Kategorie der $\mathfrak{C}$ -diskontinuierlichen Objekte, sondern auch für die Kategorie aller topologischen Räume, deren irreduzible Komponenten oder deren Wegkomponenten einpunktig sind.

0.9 Lokale $\mathfrak{R}$ -Objekte

Eine Komponentenkategorie $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}$ mit der Eigenschaft, daß die Vereinigung zweier zu $\mathfrak{R}$ gehöriger, nicht disjunkter Unterobjekte eines Objektes $X \in \mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, heißt disjunkte Komponentenkategorie. Die irreduziblen Räume bilden keine disjunkte Komponentenkategorie (Kap. II, Beispiel 1.1). Für disjunkte Komponentenkategorien $\mathfrak{R}$ wird der Begriff des lokalen $\mathfrak{R}$ -Objektes eingeführt. Ein Objekt $X \in \mathfrak{C}$ heißt lokales $\mathfrak{R}$ -Objekt, wenn in jeder Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zu $\mathfrak{R}$ gehörige Umgebung von x enthalten ist (Kap. I, Definition 4.1). Mit Hilfe dieses Begriffes lassen sich die Theorien der lokal uniform $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden, der lokal $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden und der lokal wegzusammenhängenden Räume gemeinsam behandeln. Es werden u.a. folgende Ergebnisse erzielt:

- 1) Das Bild eines lokalen $\mathfrak{R}$ -Objekts unter einem offenen (abgeschlossenen) Morphismus ist ein lokales $\mathfrak{R}$ -Objekt (Kap. I, Satz 4.7, Korollar).
- 2) Jedes offene Unterobjekt eines lokalen $\mathfrak{R}$ -Objektes ist ein lokales $\mathfrak{R}$ -Objekt (Kap. I, Satz 4.9).
- 3) $\mathfrak{R}$ sei abgeschlossen gegenüber Produktbildung. Dann gilt: Ein Produkt lokaler $\mathfrak{R}$ -Objekte ist genau dann ein lokales $\mathfrak{R}$ -Objekt, wenn alle Faktoren lokale $\mathfrak{R}$ -Objekte sind und fast alle Faktoren zu $\mathfrak{R}$ gehören (Kap. I, Satz 4.8).

Wird $\mathfrak{C} = \mathfrak{T}$ gewählt, so gilt:

- 4) Die Kategorie der lokalen $\mathfrak{R}$ -Räume ist abgeschlossen gegenüber Bildung finaler Topologien (Kap. II, Satz 4.8).
- 5) Für geeignet gewählte Kategorien $\mathfrak{C}$ erhält man:
 - a) Der Begriff "lokaler Zusammenhang" koinzidiert mit dem Begriff "lokaler $\mathfrak{C}$ -Zusammenhang".

- b) Die irreduziblen Räume sind lokal $\mathfrak{S}$ - zusammenhängend.
- c) Die NOETHERschen Räume sind lokal $\mathfrak{S}$ - zusammenhängend.
- d) Die lokal wegzusammenhängenden Räume sind lokal $\mathfrak{S}$ - zusammenhängend (Kap. II, Satz 4.4).

6) Nebenbei sei erwähnt, daß die Klasse der lokalen $\mathfrak{R}$ - Räume ($\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T}$) "coreflective" ist im Sinne von ISBELL [12]. Man gelangt zu diesem Ergebnis ohne besondere Schwierigkeiten durch direkte Verallgemeinerung einer Schlußweise von GLEASON [8], der dieses Resultat für lokal zusammenhängende Räume (und auch für lokal wegzusammenhängende Räume) erzielt hat. Hierauf wird in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen (vgl. Kap. II, Bemerkung 4.5).

Ich danke Herrn Prof. Dr. GROTEMEYER für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte.

Kapitel 1

$\mathfrak{C}$ - zusammenhängende und lokal $\mathfrak{C}$ - zusammenhängende Objekte in den Kategorien der topologischen und uniformen Räume

In diesem Kapitel ist unter $\mathfrak{C}$ eine Kategorie zu verstehen, in der entweder

a) die Objekte uniforme Räume und die Morphismen uniform stetige Abbildungen sind

oder

b) die Objekte topologische Räume und die Morphismen stetige Abbildungen sind, und unter $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$ eine Unterkategorie von $\mathfrak{C}$.

§ 1 $\mathfrak{C}$ - zusammenhängende Objekte

1. Definition und äquivalente Charakterisierung

Definition 1.1: Ein Objekt $X \in \mathfrak{C}$ heißt $\mathfrak{C}$ - zusammenhängend (in $\mathfrak{C}$), wenn $\text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, E)$ für jedes $E \in \mathfrak{C}$ nur aus konstanten Abbildungen besteht.

Bemerkung 1.1: Der durch die Definition 1.1 eingeführte Begriff " $\mathfrak{C}$ - zusammenhängend" ist invariant gegenüber Isomorphismen (vgl. Satz 1.2, Kap. 1).

Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition 1.1:

Satz 1.1: Ein Objekt $X \in \mathfrak{C}$ ist genau dann $\mathfrak{C}$ - zusammenhängend, wenn es außer $\emptyset$ und X keine Teilmengen von X in der Form $f^{-1}(y)$ gibt ($y \in E, f \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, E), E \in \mathfrak{C}$).

2. Morphismen und Komponentenzerlegung

Der Begriff " $\mathfrak{C}$ - Zusammenhang" ist invariant gegenüber surjektiven Morphismen:

Satz 1.2: Es seien $X \in \mathfrak{C}$ $\mathfrak{C}$ - zusammenhängend, $Y \in \mathfrak{C}$ und $f \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist auch Y $\mathfrak{C}$ - zusammenhängend.

Beweis: Es seien $E \in \mathfrak{C}$ und $g : Y \rightarrow E$ ein Morphismus. Wegen der Surjektivität von $f : X \rightarrow Y$ existiert zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Da nach Voraussetzung $g \circ f : X \rightarrow E$ konstant ist, gilt $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = c = \text{const}$ für alle $y \in Y$.

Zum Verständnis des nächsten Satzes sei noch an folgende Definition erinnert:

Definition 1.2: Ein Mengensystem $\mathfrak{C}$ heißt kettenverbunden, wenn zu je zwei Mengen S und S' aus $\mathfrak{C}$ eine endliche Folge $S_0, S_1, \dots, S_n$ von Elementen aus $\mathfrak{C}$ existiert derart, daß $S_0 = S$, $S_n = S'$ und $S_i \cap S_{i+1} \neq \emptyset$ gilt für jedes $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Satz 1.3: Es seien $X \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein kettenverbundenes System $\mathfrak{C}$ -zusammenhängender Unterobjekte von X . Dann ist $V = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$ $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend.

Beweis: Es seien $E \in \mathfrak{C}$ und $f: V \rightarrow E$ ein Morphismus. Sind a und b beliebige Elemente von V , so existieren Elemente U' und U'' aus $\mathfrak{U}$ mit $a \in U'$ und $b \in U''$.

Nach Voraussetzung über $\mathfrak{U}$ existiert eine endliche Folge $U_0 = U', \dots, U_{n-1}, U_n = U''$, so daß $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ gilt für $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Da U' $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend ist, muß $f|_{U'}$ konstant sein, d.h. für jedes $x \in U_0 = U'$ gilt $f(x) = f(a)$. Durch vollständige Induktion nach n folgt, daß $f(x) = f(a)$ für jedes $x \in U_n = U''$ richtig ist. Also gilt $f(a) = f(b)$.

Lemma 1.1: Ist $X \in \mathfrak{C}$ mit $X \neq \emptyset$ und $\mathfrak{M} = \{M \mid M \in \mathfrak{P}(X), M \mathfrak{C}\text{-zusammenhängend}\}$, so ist $\mathfrak{M} \neq \{\emptyset\}$ und $(\mathfrak{M}, \subset)$ induktiv geordnet.

Beweis: 1) Nach Voraussetzung existiert ein $x \in X$. Offenbar ist $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend, also $\mathfrak{M} \neq \{\emptyset\}$.

2) Es sei $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ vollständig geordnet. Aufgrund des Satzes 1.3 ist $V = \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$ $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend. $\mathfrak{N}$ besitzt also ein Supremum.

Durch Anwendung des Zornschen Lemmas auf Lemma 1.1 erhält die folgende Definition einen Sinn:

Definition 1.3: Es sei $X \in \mathfrak{C}$. Dann heißen maximale $\mathfrak{C}$ -zusammenhängende Unterobjekte von X $\mathfrak{C}$ -Zusammenhangskomponenten von X .

Über die $\mathfrak{C}$ -Zusammenhangskomponenten eines Objektes X aus $\mathfrak{C}$ lassen sich die folgenden Aussagen machen:

Satz 1.4: Ist $X \in \mathfrak{C}$, so gilt:

1) Jeder Punkt $x \in X$ und jedes $\mathfrak{C}$ -zusammenhängende Unterobjekt von X liegen in einer $\mathfrak{C}$ -Zusammenhangskomponente.

2) Sind K_1 und K_2 $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponenten, die nicht disjunkt sind, so gilt $K_1 = K_2$.

Beweis: 1) folgt durch Anwendung des (erweiterten) Zornschen Lemmas.

2) Nach Satz 1.3 folgt $K_1 \cup K_2$ ist $\mathcal{G}$ -zusammenhängend. Aus $K_1 \cup K_2 \supset K_1$ und $K_1 \cup K_2 \supset K_2$ folgt wegen der Maximalität von K_1 und K_2 ihre Identität.

Korollare:

1) $X \in \mathcal{G}$ ist genau dann $\mathcal{G}$ -zusammenhängend, wenn X nur eine $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponente besitzt.

2) $X \in \mathcal{G}$ ist genau dann $\mathcal{G}$ -zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten ein $\mathcal{G}$ -zusammenhängendes Unterobjekt gibt, das die beiden Punkte enthält.

Beweis: 1) trivial

2) a) Ist die genannte Bedingung erfüllt, so kann X nicht zwei verschiedene $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponenten besitzen. Zu einem beliebigen Element x aus einer $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponente K_1 und einem beliebigen Element y aus einer $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponente K_2 existiert ein $\mathcal{G}$ -zusammenhängendes Unterobjekt von X , das x und y enthält und folglich in einer $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponente K^* enthalten ist. Wegen $K^* \cap K_1 \neq \emptyset$ und $K^* \cap K_2 \neq \emptyset$ folgt $K^* = K_1 = K_2$.

b) Die Umkehrung ist trivial.

Bemerkung 1.2: Falls $\mathcal{G}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten ist, d.h. von topologischen bzw. uniformen T_1 -Räumen je nachdem $\mathcal{G} = \mathfrak{T}$ (Kategorie der topologischen Räume) oder $\mathcal{G} = \mathfrak{U}$ (Kategorie der uniformen Räume) gewählt wird, erhält man die Abgeschlossenheit der $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponenten aus dem folgenden Satz:

Satz 1.5: Die Aussage "Ist ein Unterobjekt M von $X \in \mathcal{G}$ $\mathcal{G}$ -zusammenhängend, so ist auch die abgeschlossene Hülle M^- von M $\mathcal{G}$ -zusammenhängend" ist genau dann gültig, wenn $\mathcal{G}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten ist.

Beweis: 1) $f: M^- \rightarrow E$ sei ein Morphismus ($E \in \mathcal{G}$). Nach Voraussetzung ist $f[M] = \{e_0\}$ mit $e_0 \in E$. Wegen der Stetigkeit von f und der Trennungseigenschaft von E folgt $A = f^{-1}(e_0)$ ist abgeschlossen in M^- und damit in X . Daraus und aus

$M \subset A \subset M^-$ folgt $A = M^-$, d.h. f ist konstant.

2) Ist die genannte Aussage gültig, so sind die $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten eines jeden $X \in \mathcal{E}$ abgeschlossen. Nimmt man bereits das Ergebnis vorweg, daß die $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten eines jeden $E \in \mathcal{E}$ einpunktig sind (Kap. 1, Satz 2.3) so muß $\mathcal{E}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten sein.

3. Strukturen

Satz 1.6: Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten. Ist dann $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{E}$, so ist $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, wenn alle X_i ($i \in I$) $\mathcal{E}$ -zusammenhängend sind.

Satz 1.6': Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von Objekten aus $\mathcal{E}$, so ist $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, wenn alle X_i ($i \in I$) $\mathcal{E}$ -zusammenhängend sind.

Beweis: 1) Ist $\prod_{i \in I} X_i$ $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, so ist X_i für jedes $i \in I$ als Bild unter dem Morphismus $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ (p_i bezeichnet die i -te Projektion) nach

Satz 1.2 $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

2) Es sei $x_{(0)} \in \prod_{i \in I} X_i$. Unterscheiden sich $x_{(n)} \in \prod_{i \in I} X_i$ und $x_{(0)}$ um höchstens n Koordinaten (n : endlich!), so liegen $x_{(n)}$ und $x_{(0)}$ in einer $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Teilmenge, wie durch Induktion nach n gezeigt wird:

a) Für $n=1$ ist die Behauptung richtig; denn unterscheiden sich $x_{(1)}$ und $x_{(0)}$ etwa in der i -ten Koordinate, so ist $Y = X_i \times \prod_{k \neq i} \{ (x_{(0)})_k \} \subset \prod_{i \in I} X_i$ isomorph zu X_i und

folglich $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, und $x_{(1)}$ und $x_{(0)}$ liegen in Y .

b) Es sei die Behauptung richtig für alle $x_{(n-1)}$ ($n \geq 2$). Ist dann ein $x_{(n)}$ gegeben, so läßt sich ein $x_{(n-1)}$ finden, das sich von $x_{(n)}$ um eine Koordinate unterscheidet. Nach a) liegen $x_{(n)}$ und $x_{(n-1)}$ in einer $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Teilmenge Z_1 , und nach Induktionsvoraussetzung liegen $x_{(n-1)}$ und $x_{(0)}$ in einer $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Teilmenge Z_2 . Wegen $x_{(n-1)} \in Z_1 \cap Z_2$, also $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$, ist Satz 1.3 anwendbar und $Z = Z_1 \cup Z_2$ ist die gesuchte $x_{(0)}$ und $x_{(n)}$ enthaltende $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Teilmenge.

menhängende Teilmenge.

Nach Satz 1.3 ist die Vereinigung V aller den Punkt $x_{(0)}$ enthaltenden $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Teilmengen $\mathcal{C}$ -zusammenhängend. Nach dem eben Bewiesenen gilt

$$U = \left\{ x \mid x \in \prod_{i \in I} X_i \text{ mit } p_i(x) = p_i(x_{(0)}) \text{ für fast alle } i \in I \right\} \subset V \subset \prod_{i \in I} X_i.$$

Ist I endlich, so gilt $U = V = \prod_{i \in I} X_i$, d.h. Satz 1.6' ist bewiesen. Ist I nicht

endlich, schließt man so: U ist dicht in $\prod_{i \in I} X_i$ und folglich ist auch V dicht in $\prod_{i \in I} X_i$.

Nach Satz 1.5 muß dann auch $\prod_{i \in I} X_i$ $\mathcal{C}$ -zusammenhängend sein, falls $\mathcal{C}$ eine Kategorie von T_1 -Objekten ist. Damit ist Satz 1.6 bewiesen.

Die Anwendung von Satz 1.2. auf den identischen Morphismus liefert unmittelbar:

Satz 1.7: Der Begriff " $\mathcal{C}$ -Zusammenhang" ist invariant gegenüber Vergrößerung der Struktur.

Satz 1.7: Der Begriff " $\mathcal{C}$ -Zusammenhang" ist invariant gegenüber Vergrößerung der Struktur.

§ 2 $\mathcal{C}$ -diskontinuierliche Objekte

1. Definition

Definition 2.1: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich, wenn die $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten von X einpunktig sind.

Bemerkung 2.1: Der Begriff " $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich" ist invariant gegenüber Isomorphismen.

2. Beziehungen zur Kategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte und zu anderen Kategorien

Führt man die Bezeichnungen $\mathcal{C}^+$ für die Unterkategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^-$ für die Unterkategorie derjenigen Objekte X aus $\mathcal{C}$ ein, für die $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(E, X)$ für alle $E \in \mathcal{C}$ nur aus konstanten Morphismen besteht, so erhält man die Resultate:

Satz 2.1: Die Kategorie $D\mathcal{C}$ der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Objekte von $\mathcal{C}$ läßt

sich durch

$$D \mathfrak{E} = (\mathfrak{E}^+)^-$$

aus der Kategorie der $\mathfrak{E}$ -zusammenhängenden Objekte von $\mathfrak{E}$ berechnen.

Beweis: 1) Es sei $Y \in (\mathfrak{E}^+)^-$ und K eine $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente von Y , d.h. $K \in \mathfrak{E}^+$. Die Inklusionsabbildung $i: K \rightarrow Y$ ist ein Morphismus und folglich konstant. K ist also einpunktig.

2) Es sei $Y \in D \mathfrak{E}$. Dann besteht $\text{Mor}_{\mathfrak{E}}(X, Y)$ für alle $X \in \mathfrak{E}^+$ nur aus konstanten Morphismen, d.h. $Y \in (\mathfrak{E}^+)^-$; denn aus $f \in \text{Mor}_{\mathfrak{E}}(X, Y)$ folgt nach Satz 1.2 $f[X] \subset Y$ ist $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend und folglich einpunktig.

Satz 2.2: $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ seien Unterkategorien von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}_2$. Dann gilt:

$$\mathfrak{E}_1^+ \supset \mathfrak{E}_2^+ \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_1^- \supset \mathfrak{E}_2^-$$

Korollar: $(\mathfrak{E}_1^+)^- \subset (\mathfrak{E}_2^+)^-$ und $(\mathfrak{E}_1^-)^+ \subset (\mathfrak{E}_2^-)^+$

Beweis: trivial.

Satz 2.3: Jedes $E \in \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{E}$ -diskontinuierlich.

Beweis: Es sei K eine $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente von $E \in \mathfrak{E}$. $\text{Mor}_{\mathfrak{E}}(K, E)$ besteht dann nur aus konstanten Abbildungen. Da die Inklusionsabbildung $i: K \rightarrow E$ ein Morphismus ist, muß K einpunktig sein.

Satz 2.4.: Die Kategorie der $\mathfrak{E}$ -zusammenhängenden Objekte läßt sich durch

$$(D \mathfrak{E})^+ = ((\mathfrak{E}^+)^-)^+ = \mathfrak{E}^+$$

aus der Kategorie der $\mathfrak{E}$ -diskontinuierlichen Objekte berechnen. Jede $D \mathfrak{E}$ umfassende Kategorie $\mathfrak{R}$, für die $\mathfrak{R}^+ \supset \mathfrak{E}^+$ gilt, ist mit $D \mathfrak{E}$ identisch.

Beweis: 1) a) Nach Satz 2.3 gilt $\mathfrak{E} \subset D \mathfrak{E}$, woraus nach Satz 2.2 folgt $(D \mathfrak{E})^+ \subset \mathfrak{E}^+$.

b) Es sei $X \in \mathfrak{E}^+$. Für jedes $Y \in D \mathfrak{E}$ und jedes $f \in \text{Mor}_{\mathfrak{E}}(X, Y)$ ist $f[X] \subset Y$ nach Satz 1.2 $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend und folglich in einer $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente von Y enthalten. Da $Y \in \mathfrak{E}$ -diskontinuierlich ist, muß f konstant sein. Also gilt $X \in (D \mathfrak{E})^+$.

2) Es gelte $\mathfrak{K} \supset D \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}^+ \supset \mathfrak{E}^+$. Ist dann K eine $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente eines Objektes $X \in \mathfrak{K}$, so ist K $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend und folglich auch $\mathfrak{K}$ -zusammenhängend. Die Inklusionsabbildung $i: K \rightarrow Y$ ist dann als Morphismus konstant, d.h. K ist einpunktig. Damit ist $\mathfrak{K} \subset D \mathfrak{E}$ bewiesen und unter Verwendung der Voraussetzung folgt die Behauptung.

Bemerkung 2.2: Aufgrund der Sätze 2.1, 2.2 und 2.4 sind die Aussagen $D \mathfrak{E} \subset D \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}^+ \supset \mathfrak{F}^+$ für zwei Unterkategorien $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{C}$ offenbar äquivalent. Je "kleiner" also die Kategorie der $\mathfrak{E}$ -zusammenhängenden Objekte gewählt wird, desto "größer" ist die Kategorie der $\mathfrak{E}$ -diskontinuierlichen Objekte und umgekehrt. Außerdem ist nach Satz 2.4 die Kategorie $D \mathfrak{E}$ charakterisiert als größte Kategorie $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{E}^+$.

Satz 2.5: a) $D \mathfrak{E} = (\mathfrak{E}^+)^- = \mathfrak{E}$ gilt d.u.n.d., wenn es keine $\mathfrak{E}$ echt umfassende Kategorie $\hat{\mathfrak{E}}$ gibt mit $\hat{\mathfrak{E}}^+ = \mathfrak{E}^+$.

b) $(\mathfrak{E}^-)^+ = \mathfrak{E}$ gilt d.u.n.d., wenn eine Unterkategorie $\hat{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{C}$ existiert derart, daß $\mathfrak{E} = \hat{\mathfrak{E}}^+$ gilt.

Beweis: a₁) $\mathfrak{E} \subset (\mathfrak{E}^+)^-$ gilt stets nach Satz 2.1 und Satz 2.3. Nach Satz 2.4 ist $((\mathfrak{E}^+)^-)^+ = \mathfrak{E}^+$. Nach Voraussetzung gibt es aber keine $\mathfrak{E}$ echt umfassende Kategorie mit dieser Eigenschaft. Also muß $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}^+)^-$ gelten.

a₂) Gilt $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}^+)^-$, so ist nach Satz 2.4 jede $\mathfrak{E}$ umfassende Kategorie $\hat{\mathfrak{E}}$ mit $\hat{\mathfrak{E}}^+ = \mathfrak{E}^+$ mit $(\mathfrak{E}^+)^-$ identisch, d.h. mit $\mathfrak{E}$. Also gibt es keine $\mathfrak{E}$ echt umfassende Kategorie mit dieser Eigenschaft.

b₁) Aus $\mathfrak{E} = \hat{\mathfrak{E}}^+$ folgt nach Satz 2.4 $(\mathfrak{E}^-)^+ = ((\hat{\mathfrak{E}}^+)^-)^+ = \hat{\mathfrak{E}}^+ = \mathfrak{E}$.

b₂) Gilt $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}^-)^+$, so wähle man $\hat{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}^-$.

Satz 2.6: Es sei eine Kategorie $\mathfrak{F}$ gegeben mit

$$\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F} \subset D \mathfrak{E}$$

Dann gilt: $D \mathfrak{E} = D \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}^+ = \mathfrak{F}^+$.

Beweis: Aus $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F} \subset D \mathfrak{E}$ folgt durch Anwendung der Sätze 2.2 und 2.4 $\mathfrak{E}^+ \supset \mathfrak{F}^+ \supset (D \mathfrak{E})^+ = \mathfrak{E}^+$, d.h. $\mathfrak{E}^+ = \mathfrak{F}^+$. Daraus folgt $(\mathfrak{E}^+)^- = D \mathfrak{E} = (\mathfrak{F}^+)^- = D \mathfrak{F}$ un-

ter Verwendung von Satz 2.1.

Satz 2.7: Es sei $Y \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}^+ = \{Y\}^+$ gilt d.u.n.d., wenn

- a) $Y \in D\mathcal{C}$ und
- b) $\mathcal{C}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{C}$ ist, die $\{Y\}$ - diskontinuierlich sind.

Beweis: 1) Aus $\mathcal{C}^+ = \{Y\}^+$ folgt nach Satz 2.1 $(\mathcal{C}^+)^- = D\mathcal{C} = (\{Y\}^+)^- = D\{Y\}$ und nach Satz 2.3 $Y \in D\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \subset D\{Y\}$.

2) Aus $\{Y\} \subset D\mathcal{C}$ folgt $D\{Y\} \subset D\mathcal{C}$ und aus $\mathcal{C} \subset D\{Y\}$ folgt $D\mathcal{C} \subset D\{Y\}$ (vgl. Sätze 2.1, 2.2 und 2.4), also $D\{Y\} = D\mathcal{C}$, und nach Satz 2.4 folgt daraus $\{Y\}^+ = \mathcal{C}^+$.

3. Strukturen

Satz 2.8: Es seien $\mathcal{R}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$, X ein Objekt aus $\mathcal{C}$, $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathcal{C}$ und $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ Morphismen mit der Eigenschaft: Zu je zwei verschiedenen Punkten x und y aus X existiert ein $\alpha \in I$, so daß $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ gilt. Sind dann alle $Y_\alpha \in \mathcal{R}^-$, so ist auch $X \in \mathcal{R}^-$.

- Korollare:
- 1) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Produktbildung.
 - 2) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung projektiver Limites.
 - 3) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Unterobjekten.
 - 4) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung des Supremums durch $\mathcal{R}^-$ bestimmter Strukturen auf einer Menge.

Beweis: Es seien $K \in \mathcal{R}$, $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(K, X)$ und a, b beliebige Elemente aus K . Wäre $f(a) = f(b)$, so existierte ein $\alpha \in I$, so daß $f_\alpha(f(a)) \neq f_\alpha(f(b))$ gilt. Für dieses α wäre dann $f_\alpha \circ f: K \rightarrow Y_\alpha$ ein nicht konstanter Morphismus, im Widerspruch zu $Y_\alpha \in \mathcal{R}^-$, f muß also konstant sein. Es folgt: $X \in \mathcal{R}^-$.

Die Anwendung von Satz 2.8 auf initiale Strukturen im Sinne von BOURBAKI ([1] und [2]) liefert die Korollare.

Bemerkung 2.3 : Wählt man in Satz 2.8 $\mathcal{R} = \mathcal{C}^+$, so erhält man wegen Satz 2.1

Aussagen über die Kategorie $\mathcal{D} \mathcal{C}$.

§ 3 Komponentenkategorien

Definition 3.1 : Eine Unterkategorie $\mathcal{R}$ von $\mathcal{C}$ heißt Komponentenkategorie, wenn gilt :

1) Aus $X \in \mathcal{R}$, $Y \in \mathcal{C}$ und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ folgt $f[X] \in \mathcal{R}$

2) Für jedes Objekt $X \neq \emptyset$ aus $\mathcal{C}$ ist

$\mathcal{M} = \{M \mid M \subset X \text{ und } M \in \mathcal{R}\} \neq \{\emptyset\}$ und $(\mathcal{M}, \subset)$ ist induktiv geordnet.

Maximale Elemente von $\mathcal{M}$ heißen Komponenten von X bzgl. $\mathcal{R}$.

Bemerkung 3.1 : Die Kategorie $\mathcal{C}^+$ ist offenbar eine Komponentenkategorie (vgl. Satz 1.2, Lemma 1.1). Weitere Beispiele sind die Kategorie der wegzusammenhängenden Räume und die Kategorie der irreduziblen¹⁾ Räume. Die letztere ist jedoch keine disjunkte Komponentenkategorie (vgl. Kap. II, Bemerkung 1.6, 3)) im Sinne der folgenden Definition :

Definition 3.2 : Eine Komponentenkategorie $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ heißt disjunkt, wenn die Vereinigung zweier nicht disjunkter, zu $\mathcal{R}$ gehöriger Unterobjekte eines Objektes $X \in \mathcal{C}$ stets zu $\mathcal{R}$ gehört.

Es gelten folgende Sätze :

Satz 3.1 : Eine Komponentenkategorie $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ ist genau dann Unterkategorie der Kategorie der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Objekte (in $\mathcal{C}$), wenn $\mathcal{C}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{C}$ ist, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind.

Beweis : 1) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{C}$, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind. Ist $X \in \mathcal{R}$, $Y \in \mathcal{C}$ und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, so folgt nach

¹⁾ vgl. Kap. II, Vorbereitungen, Definition 0.1

Axiom 1) für eine Komponentenkategorie, daß $f[X] \in \mathcal{R}$ gilt. Da $f[X]$ in einer Komponente von Y bzgl. $\mathcal{R}$ liegt (Anwendung des Zornschen Lemmas auf Axiom 2)), muß f konstant sein nach Voraussetzung über $\mathcal{E}$. Also ist $X \in \mathcal{E}^+$.

2) Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}^+$. Ist dann $Y \in \mathcal{E}$ und K Komponente von Y bzgl. $\mathcal{R}$, so ist $K \in \mathcal{E}$ -zusammenhängend und folglich einpunktig, weil $K \subset Y$ und $Y \in \mathcal{E}$ -diskontinuierlich ist (vgl. Satz 2.3).

Satz 3.2: Für eine Kategorie $\mathcal{E}$ von Objekten aus $\mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^-$ bzgl. einer Komponentenkategorie $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ genau dann, wenn $\mathcal{E}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{E}$ ist, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind.

Beweis: 1) Es sei $\mathcal{E}$ eine Kategorie von Objekten aus $\mathcal{E}$, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind ($\mathcal{R}$: Komponentenkategorie) und $Y \in \mathcal{E}$. Ist dann $X \in \mathcal{R}$ und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{E}}(X, Y)$, so gilt $f[X] \in \mathcal{R}$ und aus $f[X] \subset Y$ und der Voraussetzung über Y folgt, daß f konstant ist. Also ist $Y \in \mathcal{R}^-$. Damit ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^-$ bewiesen.

2) Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^-$. Ist dann $Y \in \mathcal{E}$ und K eine Komponente von Y bzgl. $\mathcal{R}$, so ist $Y \in \mathcal{R}^-$ und die Inklusionsabbildung $i: K \rightarrow Y$ ist folglich ein konstanter Morphismus, d.h. K ist einpunktig. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 3.2': Für eine Kategorie $\mathcal{E}$ von Objekten aus $\mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} = \mathcal{R}^-$ bzgl. einer Komponentenkategorie $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ genau dann, wenn $\mathcal{E}$ die Kategorie aller Objekte aus $\mathcal{E}$ ist, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind.

Beweis: 1) Es sei $\mathcal{E}$ die Kategorie aller Objekte aus $\mathcal{E}$, deren Komponente bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind:

a) $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^-$ nach Satz 3.2

b) Ist $Y \in \mathcal{R}^-$ und K eine Komponente von Y bzgl. $\mathcal{R}$, also insbesondere $K \in \mathcal{R}$ und $K \subset Y$, so ist die Inklusionsabbildung $i: K \rightarrow Y$ ein konstanter Morphismus, d.h. K ist einpunktig. Daraus folgt $Y \in \mathcal{E}$. Somit gilt $\mathcal{R}^- \subset \mathcal{E}$.

2) Es sei $\mathcal{E} = \mathcal{R}^-$:

a) Ist dann X ein Objekt aus $\mathcal{E}$, dessen Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind, so ist nach Satz 3.2 $\{X\} \subset \mathcal{R}^- = \mathcal{E}$, d.h. $X \in \mathcal{E}$.

b) Ist $X \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^-$, d.h. $\{X\} \subset \mathcal{R}^-$, so sind die Komponenten von X

bzgl. $\mathcal{R}$ nach Satz 3.2 einpunktig.

Bemerkung 3.2: Durch Satz 3.2' und Satz 2.8 werden für folgende Kategorien Aussagen über wesentliche initiale Strukturen gemacht:

- a) Kategorie $\mathcal{D} \subseteq$ der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Objekte
- b) Kategorie aller topologischen Räume, deren Wegzusammenhangskomponenten einpunktig sind
- c) Kategorie aller topologischen Räume, deren irreduzible Komponenten einpunktig sind.

Zugleich ist Satz 2.1 erneut bewiesen.

§ 4 Lokale $\mathcal{R}$ -Objekte

In diesem Paragraphen ist unter $\mathcal{R}$ eine disjunkte Komponentenkategorie zu verstehen mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$.

1. Definition und äquivalente Charakterisierungen

Definition 4.1: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt lokales $\mathcal{R}$ -Objekt, wenn in jeder Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zu $\mathcal{R}$ gehörige Umgebung von x enthalten ist.

Bemerkung 4.1: Der Begriff "lokales $\mathcal{R}$ -Objekt" ist invariant gegenüber Isomorphismen.

Satz 4.1.: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist genau dann lokales $\mathcal{R}$ -Objekt, wenn die Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ in X offener, nicht leerer Mengen in X offen sind.

Beweis: 1) Die Bedingung sei erfüllt. Ist dann $x \in X$ und O_x eine offene Umgebung von x , so ist die x enthaltende Komponente von O_x eine offene zu $\mathcal{R}$ gehörige Umgebung von x .

2) X sei lokales $\mathcal{R}$ -Objekt. Weiter seien O eine in X offene, nicht leere Menge und K eine Komponente von O . Für jeden Punkt $x \in K$ kann O als Umgebung von x aufgefaßt werden und nach Voraussetzung existiert eine zu $\mathcal{R}$ gehörige Umgebung U_x von x mit $U_x \subset O$. Es gilt sogar $U_x \subset K$; denn U_x ist in

einer Komponente K' von O enthalten, die wegen der Disjunktheit von $\mathcal{R}$ mit K identisch sein muß. Damit ist aber gezeigt, daß K offen ist.

Satz 4.2: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist genau dann lokales $\mathcal{R}$ -Objekt, wenn es eine Basis²⁾ aus Objekten von $\mathcal{R}$ besitzt.

Beweis: 1) Es sei X ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt. Offenbar ist das System $\{O \mid O \text{ offen und } O \in \mathcal{R}\}$ eine Basis von X ; denn jede offene Menge von X ist darstellbar als Vereinigung seiner Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$, die nach Satz 4.1 offen sind.

2) X besitze eine Basis aus Objekten von $\mathcal{R}$. Ist dann $x \in X$ und O_x eine offene Umgebung von x , so ist O_x Vereinigung offener zu $\mathcal{R}$ gehöriger Teilmengen von X . Wenigstens einer dieser Teilmengen gehört x an. X ist also lokales $\mathcal{R}$ -Objekt.

Satz 4.3: Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$, dessen Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind, ist genau dann lokales $\mathcal{R}$ -Objekt, wenn es diskret ist.

Beweis: trivial nach Satz 4.1.

2. Komponenten, Überdeckungen und spezielle Morphismen

a) Komponenten

Satz 4.4: Für ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt $X \in \mathcal{C}$ gelten die Aussagen:

1) Ist X quasikompakt, so besitzt X nur endlich viele Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$.

2) Ist X ein Lindelöf-Raum, so besitzt X höchstens abzählbar viele Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$.

Beweis: 1) Es sei X lokales $\mathcal{R}$ -Objekt und quasikompakt. Nach Satz 4.1 ist X Vereinigung offener zu $\mathcal{R}$ gehöriger Unterobjekte O_i ($i \in I$). Da X quasikompakt ist, reichen endlich viele davon zur Überdeckung von X aus. Da jedes O_i in einer Komponente bzgl. $\mathcal{R}$ enthalten ist, kann X nur endlich viele Komponenten besitzen.

²⁾ im topologischen Sinn

2) Die Behauptung wird analog zu 1) bewiesen.

Satz 4.5: Es sei $X \in \mathcal{C}$ lokales $\mathcal{R}$ -Objekt und separabel. Dann besitzt jede offene nicht leere Teilmenge O von X höchstens abzählbar viele Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert $D \subset X$ mit D abzählbar und $D^- = X$. Da jede Komponente K von O offen und nicht leer ist, hat sie mit D einen nicht leeren Durchschnitt. Da D abzählbar ist und das System der Komponenten von O (bzgl. $\mathcal{R}$) disjunkt ist, muß auch dieses System abzählbar sein.

b) Überdeckungen

Satz 4.6: Es seien $X \in \mathcal{C}$ und $(U_i)_{i \in I}$ ein offenes Überdeckungssystem aus lokalen $\mathcal{R}$ -Unterobjekten³⁾ von X . Dann ist auch X ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt.

Beweis: Es seien $x \in X$ und O_x eine offene Umgebung von x . Da $(U_i)_{i \in I}$ ein Überdeckungssystem von X ist, existiert ein $k \in I$ mit $x \in U_k \cap O_x$. Die x enthaltende Komponente K_x (bzgl. $\mathcal{R}$) der in U_k offenen Menge $U_k \cap O_x$ muß nach Satz 4.1. offen sein in U_k , weil U_k ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt ist. Da U_k offen in X ist, muß auch K_x offen in X sein, d.h. K_x ist eine zu $\mathcal{R}$ gehörige in O_x enthaltene Umgebung von x .

Bemerkung 4.2: Satz 4.6 ist für beliebige Überdeckungen mit lokalen $\mathcal{R}$ -Objekten falsch. Man wähle etwa $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}\}^+$ und überdecke $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$ mit seinen irreduziblen Komponenten. Diese sind lokal $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, aber $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$ ist nicht lokal $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, weil sonst nach Satz 4.3 $\mathbb{R}$ die diskrete Topologie tragen müßte.

c) Spezielle Morphismen

Bemerkung 4.3: Das Bild eines lokalen $\mathcal{R}$ -Objektes unter einem Morphismus braucht kein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt zu sein. Wählt man etwa $\mathcal{C} = \mathcal{T}$ und $\mathcal{R} = \{\mathbb{R}\}^+$, so ist

$$1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$$

ein surjektiver Morphismus, aber $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$ ist nicht lokal $\mathbb{R}$ -zusammenhängend

³⁾ Ein Unterobjekt eines Objektes $X \in \mathcal{C}$ heißt lokales $\mathcal{R}$ -Unterobjekt, wenn es ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt ist.

im Gegensatz zu $(R, \mathcal{P}(R))$. Schränkt man aber die Klasse der Morphismen ein, so erhält man die Invarianz des Begriffes "lokales $\mathcal{R}$ -Objekt" gegenüber diesen speziellen Morphismen wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.7: Es seien X und Y Objekte aus $\mathcal{C}$ und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sei surjektiv und habe die Eigenschaft, daß für jede offene Teilmenge O von X mit $O = f^{-1}[f[O]]$ die Menge $f[O]$ offen in Y ist. Mit X ist dann auch Y ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt.

Beweis: Es sei K^* eine Komponente (bzgl. $\mathcal{R}$) einer offenen, nicht leeren Menge $O^* \subset Y$. Mit $K = f^{-1}[K^*]$ folgt aus der Surjektivität von f $f[K] = f[f^{-1}[K^*]] = K^*$ und damit $f^{-1}[f[K]] = f^{-1}[K^*] = K$. Aufgrund der Voraussetzung über f genügt es wegen Satz 4.1 zu zeigen, daß K offen in X ist. Es sei also $x \in K \subset O = f^{-1}[O^*]$ und K_x die den Punkt x enthaltende Komponente der offenen Teilmenge O von X (f stetig!). Da K_x nach Voraussetzung über X und nach Satz 4.1 offen in X ist, ist der Beweis vollendet, wenn gezeigt werden kann, daß $K_x \subset K$ gilt. Nach Definition 3.1 ist $f[K_x] \subset O^*$ ein Objekt aus $\mathcal{R}$ und nach Definition 3.2 gehört auch $f[K_x] \cup K^*$ zu $\mathcal{R}$ ($f[K_x] \cap K^* \neq \emptyset$, weil $x \in K_x \cap K = K_x \cap f^{-1}[K^*]$ ist und folglich $f(x) \in f[K_x] \cap K^*$ gilt). Da aber K^* Komponente von O^* ist, muß $f[K_x] \cup K^* = K^*$ gelten, d.h. es ist $f[K_x] \subset K^*$. Daraus folgt aber

$$K_x \subset f^{-1}[f[K_x]] \subset f^{-1}[K^*] = K.$$

Korollar: Das Bild eines lokalen $\mathcal{R}$ -Objekts unter einem offenen Morphismus ist ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt.

Bemerkung 4.4: Satz 4.7 und das Korollar bleiben richtig, wenn man "offen" durch "abgeschlossen" ersetzt. Für jedes $M \subset X$ mit $M = f^{-1}[f[M]]$ gilt wegen der Surjektivität von f $f[C M] = f[C(f^{-1}[f[M]])] = f[f^{-1}[C(f[M])]] = C(f[M])$, woraus aufgrund des Dualitätsprinzips für topologische Räume die Äquivalenz beider Behauptungen folgt.

3. Strukturen

Satz 4.8: $\mathcal{R}$ sei abgeschlossen gegenüber Produktbildung. Dann gilt: Ein Produkt $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ lokaler $\mathcal{R}$ -Objekte X_{α} ($\alpha \in I$) ist genau dann ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt, wenn

alle Faktoren X_α lokale $\mathcal{R}$ -Objekte sind und fast alle Faktoren X_α zu $\mathcal{R}$ gehören.

Beweis: 1) Es sei $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt. Da $p_\alpha: \prod X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ als

Projektionsabbildung ein surjektiver, offener Morphismus ist, folgt nach Satz 4.7,

Korollar, daß X_α für jedes $\alpha \in I$ ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt ist. Ist ferner O ein

offenes zu $\mathcal{R}$ gehöriges Unterobjekt von $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, so gilt $p_\alpha [O] = X_\alpha$ für fast alle α

und somit sind nach Definition 3.1 die X_α Objekte von $\mathcal{R}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

2) Es seien alle X_α lokale $\mathcal{R}$ -Objekte und für alle $\alpha \in I \setminus L$ außerdem Objekte aus $\mathcal{R}$, wobei $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset I$ gilt. Ist dann

$x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und O_x eine offene Umgebung von x , so ist x in mindestens

einer Menge der Form $\prod_{\alpha \in I} O_\alpha(x_\alpha)$, wobei $O_\alpha(x_\alpha) = X_\alpha$ für alle

$\alpha \in I \setminus M$ ($M = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subset I$) und $O_\alpha(x_\alpha)$ echte offene Teilmenge von X_α

für alle $\alpha \in M$ gilt, enthalten. Es seien $W_\alpha = X_\alpha$ für $\alpha \in I \setminus (L \cup M)$ (die X_α sind

dann nach Voraussetzung Objekte aus $\mathcal{R}$), und es seien W_α für $\alpha \in L \cup M$ die in

$O_\alpha(x_\alpha)$ nach Voraussetzung über die lokale $\mathcal{R}$ -Objekt-Eigenschaft von X_α ent-

haltenen, zu $\mathcal{R}$ gehörigen Umgebungen von x_α . $\prod_{\alpha \in I} W_\alpha$ gehört zu $\mathcal{R}$ nach Voraus-

setzung und ist eine in O_x enthaltene Umgebung von x .

Satz 4.9: Jedes offene Unterobjekt eines lokalen $\mathcal{R}$ -Objekts ist ein lokales $\mathcal{R}$ -Objekt.

Beweis: trivial.

Kapitel II

$\mathfrak{C}$ - zusammenhängende und lokal $\mathfrak{C}$ - zusammenhängende Räume

In diesem Kapitel wird nur noch die Kategorie $\mathfrak{C}$ der topologischen Räume betrachtet. Insbesondere ist also unter $\mathfrak{C}$ eine Klasse topologischer Räume zu verstehen. Sie soll einen mindestens zweipunktigen Raum enthalten.

Vorbereitungen

Es werden zunächst einige Definitionen und Ergebnisse aus [3], [6], [9] und [10] zusammengestellt, die für das Verständnis dieses Kapitels nützlich sind.

1) Ergebnisse aus [3]:

Definition 0.1: Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt irreduzibel, wenn für $O_1, O_2 \in \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}$ stets gilt:

$$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}.$$

Satz 0.1: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) $(X, \mathfrak{X})$ ist irreduzibel
- 2) Aus $X = A \cup B$, $A = A^-$, $B = B^-$ folgt
 $X = A$ oder $X = B$.
- 3) Jedes $O \in \mathfrak{X} \setminus \{\emptyset\}$ ist dicht in X .

Definition 0.2: Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ heißt NOETHERsch, wenn jede aufsteigende Folge

$$O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \dots$$

offener Mengen aus $\mathfrak{X}$ stationär ist.

Satz 0.2: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) $(X, \mathfrak{X})$ ist noethersch
- 2) Jede absteigende Folge
 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

abgeschlossener Mengen aus X ist stationär.

3) Jede nicht leere Menge offener Teilmengen von X enthält maximale Elemente (maximal bzgl. der durch die Inklusion eingeführten Ordnung)

4) Jede offene Menge aus X ist quasikompakt.

Im Zusammenhang mit irreduziblen und NOETHERschen Räumen ist auch die Einführung der in [3] behandelten ZARISKI-Topologie von Interesse :

Ist M Teilmenge eines kommutativen Ringes mit Einselement 1 , so soll mit $V(M)$ die Menge aller M umfassenden Primideale $\mathfrak{p}$ von A bezeichnet werden. Die ZARISKI-Topologie ist dann wie folgt definiert :

Definition 0.3 : Es seien A ein kommutativer Ring mit 1 und

$X = \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal in } A \}$. Dann heißt

$\mathfrak{X} = \{ X \setminus V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subset A \text{ Ideal} \}$ ZARISKI-Topologie von X und der topologische Raum $(X, \mathfrak{X}) = \text{Spec}(A)$ heißt Primspektrum von A .

Bezeichnet man mit $\mathfrak{r}(0)$ das Ideal der nilpotenten Elemente des kommutativen Ringes A , d.h. das Nilradikal von A , so gilt folgender Satz :

Satz 0.3 : Der topologische Raum $\text{Spec}(A)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $A/\mathfrak{r}(0)$ ein 1-Bereich ist.

Daraus folgt insbesondere, daß $\text{Spec}(A)$ ein irreduzibler Raum ist, wenn A ein Integritätsbereich ist. NOETHERsche Räume lassen sich mit Hilfe des Primspektrums wie folgt erzeugen :

Satz 0.4 : Ist A ein NOETHERscher Ring, so ist $\text{Spec}(A)$ ein NOETHERscher Raum.

Eine weitere Eigenschaft des Primspektrums ist die folgende :

Satz 0.5 : $\text{Spec}(A)$ ist ein quasikompakter T_0 -Raum.

Bemerkung 0.1 : Das Primspektrum läßt ferner eine funktorielle Deutung zu. Bezeichnen nämlich A und $\bar{A}$ zwei kommutative Ringe mit Einselementen und $h: A \rightarrow \bar{A}$ einen Ringhomomorphismus, so ist die für jedes $\bar{\mathfrak{p}}$ aus $\text{Spec}(\bar{A})$ durch $h(\bar{\mathfrak{p}}) = h^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})$ definierte zu h assoziierte Abbildung

$$^*h = \text{Spec}(h) : \text{Spec}(\bar{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

stetig und $\text{Spec}(\cdot) : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathfrak{T}$ ist ein kontravarianter Funktor der Kategorie $\mathcal{A}$ der kommutativen Ringe mit Einselement in die Kategorie $\mathfrak{T}$ der topologischen Räume.

2) Ergebnisse aus [6]:

Es seien $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U}_0$ das System aller endlichen offenen Überdeckungen von X . Für jedes $\alpha \in \mathcal{U}_0$ läßt sich eine Äquivalenzrelation R_α wie folgt definieren: Zwei Elemente $x, y \in X$ sind genau dann äquivalent bzgl. R_α , wenn es kein $O \in \alpha$ gibt, das nur eins der Elemente x, y enthält und das andere nicht. Die x enthaltende Äquivalenzklasse $[x]_{R_\alpha}$ bzgl. R_α ist dann darstellbar als Durchschnitt aller x enthaltenden Elemente $O \in \alpha$ und der x enthaltenden Komplemente CO von $O \in \alpha$. Der Quotientenraum $(X/R_\alpha, \mathfrak{X}_{R_\alpha})$ ist ein endlicher T_0 -Raum. $\mathcal{R} = \{R_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{U}_0\}$ läßt sich in natürlicher Weise mit einer Ordnungsstruktur versehen:

$$R_\beta \leq R_\alpha \iff R_\beta \subset R_\alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{U}_0.$$

$(\mathcal{R}, \leq)$ ist absteigend filtrierend, d.h. zu je zwei Elementen $R_\alpha, R_\beta \in \mathcal{R}$ existiert ein $R_\gamma \in \mathcal{R}$ mit $R_\gamma \leq R_\alpha, R_\gamma \leq R_\beta$ (Für $\gamma \in \mathcal{U}_0$ wähle man entweder $\gamma = \{O_1 \cap O_2 \mid O_1 \in \alpha \text{ und } O_2 \in \beta\}$ oder $\gamma = \{O \mid O \in \alpha \text{ oder } O \in \beta\}$).

Bezeichnet man für $R_\beta \leq R_\alpha$ mit $\prod_{R_\alpha}^{R_\beta}$ die durch die Identität auf X induzierte stetige Abbildung von X/R_β auf X/R_α , so ist durch $(X_{R_\alpha} = X/R_\alpha, \prod_{R_\alpha}^{R_\beta})_{R_\alpha} \in \mathcal{R}$

ein projektives System topologischer Räume definiert. Es gelten dann für den projektiven Limes folgende Sätze:

Satz 0.6: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer T_0 -Raum. Dann ist der projektive Limes $\varprojlim X_{R_\alpha}$ eine quasikompakte T_0 -Erweiterung⁴⁾ von $(X, \mathfrak{X})$.

⁴⁾ Ein topologischer Raum $(Y, \mathfrak{Y})$ heißt Erweiterung des topologischen Raumes $(X, \mathfrak{X})$, wenn $(X, \mathfrak{X})$ homöomorph ist zu einem dichten Unterraum von $(Y, \mathfrak{Y})$

Satz 0.7: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer T_1 -Raum. Dann ist der Unterraum $(X, \mathfrak{Y})$ des projektiven Limes $\varprojlim X_{R_\alpha}$, der aus allen abgeschlossenen Punkten besteht, die WALLMANsche Erweiterung von $(X, \mathfrak{X})$.

Nennt man eine Äquivalenzrelation T auf einer Menge X schwächer als S , wenn $T \subset S$ gilt, und eine Äquivalenzrelation R auf einem topologischen Raum $(X, \mathfrak{X})$ HAUSDORFFsch, wenn der zugehörige Quotientenraum ein HAUSDORFFscher Raum (T_2 -Raum) ist, so gilt:

Satz 0.8: Die STONE-CECHsche Erweiterung βX eines vollständig regulären topologischen Raumes $(X, \mathfrak{X})$ ist homöomorph zum Quotientenraum des projektiven Limes $\varprojlim X_{R_\alpha}$ nach der schwächsten HAUSDORFFschen Äquivalenzrelation auf $\varprojlim X_{R_\alpha}$.

3) Ergebnisse aus [9]:

Die hier aufgeführten Ergebnisse gelten unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{E}$ eine Klasse von T_2 -Räumen ist.

Definition 0.4:

a) Das Paar (r, rX) heißt Erweiterung von X , wenn rX ein topologischer Raum ist, r ein Element von $C(X, rX)$ ist und $r[X]$ dicht in rX liegt. Sind Mißverständnisse ausgeschlossen, so wird auch rX anstelle von (r, rX) geschrieben. rX heißt $\mathfrak{E}$ -fortsetzbar, wenn zu jedem $E \in \mathfrak{E}$ und jedem $f \in C(X, E)$ ein $g \in C(rX, E)$ mit $g \circ r = f$ existiert.

b) Eine Erweiterung (r, rX) von X heißt Einbettung von X , wenn r ein Homöomorphismus von X in rX ist.

c) Eine Teilmenge U von X heißt $\mathfrak{E}$ -offen ($\mathfrak{E}$ -abgeschlossen) in X , wenn es ein $E \in \mathfrak{E}$, eine offene (abgeschlossene) Teilmenge V von E und ein $f \in C(X, E)$ mit $U = f^{-1}[V]$ gibt.

d) Zwei Teilmengen A, B von X heißen $\mathfrak{E}$ -separiert, wenn es ein $E \in \mathfrak{E}$ und ein $f \in C(X, E)$ mit $(f[A])^\perp \cap (f[B])^\perp = \emptyset$ gibt.

e) X heißt $\mathfrak{C}$ -kompakt, wenn X einem abgeschlossenen Unterraum eines Produktes von Räumen aus $\mathfrak{C}$ homöomorph ist. $K\mathfrak{C}$ sei die Klasse aller $\mathfrak{C}$ -kompakten Räume.

f) X heißt $\mathfrak{C}$ -normal, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X $K\mathfrak{C}$ -separiert sind. $N\mathfrak{C}$ sei die Klasse aller $\mathfrak{C}$ -normalen Räume.

g) X heißt $\mathfrak{C}$ -regulär, wenn X Unterraum eines $\mathfrak{C}$ -kompakten Raumes ist. $R\mathfrak{C}$ sei die Klasse aller $\mathfrak{C}$ -regulären Räume.

h) Die Klassen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ heißen äquivalent, wenn $K\mathfrak{C} = K\mathfrak{C}'$ gilt.

Satz 0.9: Jeder kompakte, $\mathfrak{C}$ -reguläre Raum ist $\mathfrak{C}$ -kompakt.

Satz 0.10: Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathfrak{C}$ -regulär, wenn er einem Unterraum eines Produktes von Räumen aus $\mathfrak{C}$ homöomorph ist.

Satz 0.11: Es gilt $\mathfrak{C} \subset K\mathfrak{C} \subset N\mathfrak{C} \subset R\mathfrak{C}$.

Satz 0.12: Jeder nulldimensionale Raum ist $\mathfrak{C}$ -regulär.

Satz 0.13: Jeder total diskontinuierliche kompakte Raum ist $\mathfrak{C}$ -kompakt.

Auf die fundamentale Bedeutung der $\mathfrak{C}$ -kompakten, $\mathfrak{C}$ -normalen und $\mathfrak{C}$ -regulären Räume kann hier nicht näher eingegangen werden (vgl. [9]).

4) Ergebnis aus [10]:

Satz 0.14: Ist Y ein topologischer Raum, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) Y ist ein T_1 -Raum

b) Es gibt einen regulären Raum X (mit wenigstens zwei Punkten), so daß jede stetige Abbildung von X in Y konstant ist.

§ 1 $\mathfrak{C}$ -zusammenhängende Räume

1. Zur Definition äquivalente Charakterisierungen

Satz 1.1. aus Kapitel I enthält folgende Spezialfälle:

Satz 1.1': Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es

außer $\emptyset$ und X keine offen-abgeschlossenen Teilmengen von X gibt.

Beweis : Es sei D_2 ein zweipunktiger diskreter Raum und $\mathcal{C} = \{D_2\}$. Offenbar ist dann jede Menge der Form $f^{-1}(y)$ ($y \in D_2, f \in C(X, D_2)$) offen-abgeschlossen. Ist andererseits $A \subset X$ offen-abgeschlossen, so gilt :

a) Ist $A = \emptyset$, so gilt $A = f^{-1}(y_1)$ mit $f : X \rightarrow D_2$ definiert durch $f(x) = y_0 \neq y_1$ für alle $x \in X$ ($D_2 = \{y_0, y_1\}$).

b) Ist $A = X$, so gilt $A = f^{-1}(y_0)$ mit $f(x) = y_0$ für alle $x \in X$.

c) Ist $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$, so gilt $X = A \cup C A$ und $f : X \rightarrow D_2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } x \in A \\ y_1 & \text{für } x \in C A \end{cases}$$

ist stetig und erfüllt die Beziehung $f^{-1}(y_0) = A$. Die offen-abgeschlossenen Teilmengen von X sind also identisch mit den Mengen $f^{-1}(y)$ und die Behauptung ist nach Satz 1.1 bewiesen.

Satz 1.1'' : Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathcal{R}$ -zusammenhängend, wenn es außer $\emptyset$ und X keine Nullstellenmengen stetiger reellwertiger Funktionen auf X gibt.

Beweis : Jede Nullstellenmenge hat die Form $f^{-1}(0)$ mit $f \in C(X, \mathbb{R})$ und umgekehrt ist jede Menge der Form $f^{-1}(y)$ mit $f \in C(X, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$ als Nullstellenmenge der Funktion $(f - \bar{y}) \in C(X, \mathbb{R})$ ($\bar{y}(x) = y$ für alle $x \in X$) darstellbar. Die Behauptung folgt nach Satz 1.1.

Satz 1.2 : Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent für einen topologischen Raum X :

a) X ist $\mathcal{C}$ -zusammenhängend

b) Aus $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit A_i $\mathcal{C}$ -abgeschlossen in X für jedes $i \in I$ folgt die

Existenz eines $j \in I$ mit $A_j = X$.

Beweis : 1) a) $\Rightarrow$ b) : Es sei $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit A_i $\mathcal{C}$ -abgeschlossen für jedes $i \in I$.

Es existieren also für jedes $i \in I$ Räume $E_i \in \mathfrak{E}$, Abbildungen $f_i \in C(X, E_i)$ und in E_i abgeschlossene Mengen A_i^* mit $A_i = f_i^{-1}[A_i^*]$. Da X $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend ist, gilt $f_i[X] = \{p_i\}$ mit $p_i \in E_i$, also

$$A_i = f_i^{-1}[A_i^*] = \begin{cases} \emptyset & \text{für } p_i \notin A_i^* \\ X & \text{für } p_i \in A_i^* \end{cases}, \text{ für jedes } i \in I.$$

Da $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist, existiert ein $j \in I$ mit $X = f_j^{-1}[A_j^*] = A_j$.

2) b) $\Rightarrow$ a): Angenommen X wäre nicht $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend. Dann existieren ein $E \in \mathfrak{E}$ und ein nicht konstantes $f \in C(X, E)$. Da die Mengen $\{y\}$ für jedes $y \in f[X]$ abgeschlossen in E sind und $X = \bigcup_{y \in f[X]} f^{-1}[\{y\}]$ gilt, wobei die Mengen

$f^{-1}[\{y\}]$ $\mathfrak{E}$ -abgeschlossen sind in X , folgt die Existenz eines

$y_0 \in f[X]$ mit $X = f^{-1}[\{y_0\}]$, d.h. f ist konstant.

Widerspruch!

Der weiteren Charakterisierung $\mathfrak{E}$ -zusammenhängender Räume unter einschränken- den Voraussetzungen dient die folgende Definition:

Definition 1.1: $(Y, \mathfrak{Y})$ sei ein mindestens zweipunktiger topologischer Raum. Dann heißt ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ vollständig Y -regulär, wenn gilt:

1) Es existieren Punkte $y_0, y_1 \in Y$ mit $y_0 \neq y_1$, so daß zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X und zu jedem Punkt $p \in A$ eine stetige Abbildung

$$\varphi: X \rightarrow Y$$

existiert mit $\varphi(p) = y_0$ und $\varphi[A] = \{y_1\}$

2) $(X, \mathfrak{X})$ ist ein T_2 -Raum.

Bemerkung 1.1: Ein vollständig regulärer Raum ist vollständig $[0,1]$ -regulär und vollständig $\mathbb{R}$ -regulär.

Satz 1.3: Es sei $\mathfrak{E}$ eine Klasse topologischer Räume, die bzgl. eines $Y \in \mathfrak{E}$ vollständig Y -regulär sind. Ein topologischer Raum $(X, \mathfrak{X})$ ist genau dann $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend, wenn gilt:

(E) Für jedes $Z \in \mathcal{E}$ folgt aus $X = f^{-1}(z_0) \cup g^{-1}(z_0)$ mit $z_0 \in Z$ und $f, g \in C(X, Z)$ stets $X = f^{-1}(z_0)$ oder $X = g^{-1}(z_0)$.

Dem Beweis von Satz 1.3 werden zunächst zwei Lemmata vorangeschickt.

Lemma 1.1: Das stetige Bild eines topologischen Raumes X mit der Eigenschaft (E) hat die Eigenschaft (E).

Beweis: Es sei $h: X \rightarrow \bar{X}$ ($\bar{X}$ topologischer Raum) stetig und surjektiv. Weiter seien $Z \in \mathcal{E}$ und $h[X] = \bar{X} = f^{-1}(z_0) \cup g^{-1}(z_0)$ mit $z_0 \in Z$ und $f, g \in C(\bar{X}, Z)$.

Dann ist $X = h^{-1}[\bar{X}] = h^{-1}[f^{-1}(z_0) \cup g^{-1}(z_0)] =$

$= (f \circ h)^{-1}(z_0) \cup (g \circ h)^{-1}(z_0)$. Daraus folgt, weil X die Eigenschaft (E) besitzt,

$X = (f \circ h)^{-1}(z_0)$ oder $X = (g \circ h)^{-1}(z_0)$ und somit

$\bar{X} = h[X] = h[h^{-1}[f^{-1}(z_0)]] = f^{-1}(z_0)$ oder

$\bar{X} = h[X] = h[h^{-1}[g^{-1}(z_0)]] = g^{-1}(z_0)$, d.h. $h[X]$ besitzt die Eigenschaft (E).

Lemma 1.2: Es sei $\mathcal{E}$ wie in Satz 1.3 und $Z \in \mathcal{E}$. Jeder Unterraum X von Z mit der Eigenschaft (E) ist einpunktig.

Beweis: Angenommen X besitze mehr als ein Element. Es seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$.

Wegen der Erbllichkeit des Begriffes "Y-regulär" ist auch X Y-regulär. Es existie-

ren also in X offene Mengen O_1 und O_2 mit $x \in O_1$, $y \in O_2$ und

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$ sowie stetige Abbildungen

$$f_x, f_y: X \rightarrow Y$$

mit $f_x(x) = y_0$, $f_x[X \setminus O_1] = \{y_1\}$

$$f_y(y) = y_0, f_y[X \setminus O_2] = \{y_1\},$$

wobei $y_0 \neq y_1$ gilt. Offenbar ist dann $(X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) = X \setminus \emptyset =$

$= X \subset f_x^{-1}(y_1) \cup f_y^{-1}(y_1) \subset X$, also $X = f_x^{-1}(y_1) \cup f_y^{-1}(y_1)$ und weil $Y \in \mathcal{E}$ und

für X die Eigenschaft (E) gilt, folgt $X = f_x^{-1}(y_1)$ oder $X = f_y^{-1}(y_1)$, d.h.

f_x oder f_y müßte konstant sein im Widerspruch zur Konstruktion. X muß also einpunktig sein.

Beweis von Satz 1.3: 1) X habe die Eigenschaft (E). Es seien $Z \in \mathcal{E}$ und $f: X \rightarrow Z$ stetig. Mit X hat auch $f[X]$ nach Lemma 1.1 die Eigenschaft (E) und ist als

Unterraum von $Z \in \mathfrak{E}$ nach Lemma 1.2 einpunktig, d.h. f ist konstant.
 X ist also $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend.

2) X sei $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend und $Z \in \mathfrak{E}$.

Es gelte $X = f^{-1}(z_0) \cup g^{-1}(z_0)$ mit $z_0 \in Z$ und $f, g \in C(X, Z)$. Da X $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend ist, müssen nach Kap. IV, Satz 1.1 $f^{-1}(z_0)$ und $g^{-1}(z_0)$ entweder mit der leeren Menge $\emptyset$ oder mit X übereinstimmen. Daraus folgt dann, daß mindestens eine der beiden Mengen $f^{-1}(z_0)$ und $g^{-1}(z_0)$ mit X identisch ist, d.h. X erfüllt die Eigenschaft (E).

Bemerkung 1.2: Beispiele von Klassen $\mathfrak{E}$ topologischer Räume, die bzgl. eines $Y \in \mathfrak{E}$ vollständig Y -regulär sind, sind:

- 1) $\mathfrak{E} = \{\mathbb{R}\}$
- 2) $\mathfrak{E} =$ Klasse der vollständig regulären Räume
- 3) $\mathfrak{E} = \{D_2\}$
- 4) $\mathfrak{E} =$ Klasse der diskreten Räume

Aus Satz 1.3 erhält man so die folgenden Spezialfälle:

Satz 1.3': Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn aus $X = A \cup B$ mit A, B offen-abgeschlossen stets folgt $X = A$ oder $X = B$.

Satz 1.3'': Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, wenn aus $X = Z(f) \cup Z(g)$ mit $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ stets folgt $X = Z(f)$ oder $X = Z(g)$ ⁵⁾.

Für $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume erhält man außerdem noch folgende Charakterisierungen:

Satz 1.4: Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, wenn der Funktionenring $C(X, \mathbb{R})$ ein Integritätsbereich ist.

Beweis: 1) Es sei X $\mathbb{R}$ -zusammenhängend. Sind $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ mit $f \cdot g = 0$, so folgt $Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g) = X$ und nach Satz 1.3'' $X = Z(f)$ oder $X = Z(g)$, d.h. $f = 0$ oder $g = 0$. $C(X, \mathbb{R})$ ist also ein I-Bereich.

⁵⁾ $Z(h)$ für $h \in C(X, \mathbb{R})$ bedeutet "zero-set" oder Nullstellenmenge

2) Es sei $C(X, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{I}$ -Bereich. Ist dann für $f, g \in C(X, \mathbb{R})$

$X = Z(f) \cup Z(g) = Z(f \cdot g)$, d.h. $f \cdot g = 0$, so folgt $f = 0$ oder $g = 0$, d.h.

$X = Z(f)$ oder $X = Z(g)$. Nach Satz 1.3" ist X also $\mathbb{R}$ -zusammenhängend.

Satz 1.5: Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, wenn der Funktionenring $C(X, \mathbb{R})$ (algebraisch) isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Beweis: 1) Es gelte $C(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Mit $\mathbb{R}$ ist dann auch $C(X, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{I}$ -Bereich und nach Satz 1.4 ist X $\mathbb{R}$ -zusammenhängend.

2) Ist X $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, so sind nach Definition des $\mathbb{R}$ -Zusammenhangs $C(X, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise isomorph.

Bemerkung 1.3: Aus Satz 1.4 und Satz 1.5 folgt, daß der kontravarianter Funktor $C(\cdot, \mathbb{R}) : \mathfrak{T} \rightsquigarrow \mathcal{A}$ der Kategorie $\mathfrak{T}$ der topologischen Räume in die Kategorie $\mathcal{A}$ der kommutativen Ringe mit Einselement als einzigen Integritätsbereich einen Körper erzeugt, und zwar (bis auf Isomorphie) den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Satz 1.6: Ein topologischer Raum X ist genau dann $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, wenn das Primspektrum $\text{Spec}(C(X, \mathbb{R}))$ des Funktionenringes $C(X, \mathbb{R})$ irreduzibel ist.

Beweis: 1) Ist X $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, so ist $C(X, \mathbb{R})$ nach Satz 1.4 ein $\mathbb{I}$ -Bereich und nach Satz 0.3 ist $\text{Spec}(C(X, \mathbb{R}))$ irreduzibel.

2) Ist $\text{Spec}(C(X, \mathbb{R}))$ irreduzibel, so folgt nach Satz 0.3, daß $C(X, \mathbb{R})_{r(0)} \cong C(X, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{I}$ -Bereich ist, d.h. X ist $\mathbb{R}$ -zusammenhängend.

2. Klassifikation der $\mathbb{C}$ -zusammenhängenden Räume

Satz 1.7: Jeder $\mathbb{C}$ -zusammenhängende Raum X ist zusammenhängend.

Beweis: Angenommen X wäre nicht zusammenhängend. Dann ist X darstellbar als disjunkte Vereinigung nicht leerer offener Mengen $O_1 \subset X$ und $O_2 \subset X$.

$Y \in \mathbb{C}$ sei mindestens zweipunktig; es seien also $y_1 \in Y$ und $y_2 \in Y$ mit

$y_1 \neq y_2$. Die durch

$$f(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x \in O_1 \\ y_2 & \text{für } x \in O_2 \end{cases}$$

definierte Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist stetig und nicht konstant im Widerspruch zur Voraussetzung über X .

Bemerkung 1.4: Die Umkehrung von Satz 1.7 ist falsch; denn z.B. ist $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$ zusammenhängend, aber nicht $\mathbb{R}$ -zusammenhängend. Ein Kriterium, wann ein zusammenhängender Raum $\mathcal{G}$ -zusammenhängend ist, liefert der folgende Satz:

Satz 1.8: X sei ein zusammenhängender topologischer Raum. X ist genau dann $\mathcal{G}$ -zusammenhängend, wenn alle Mengen $f^{-1}(y)$ mit $f \in C(X, Y)$, $Y \in \mathcal{G}$ und $y \in Y$ offen-abgeschlossen sind.

Beweis: 1) X sei $\mathcal{G}$ -zusammenhängend. Nach Kap. I, Satz 1.1 gibt es als einzige Mengen der Form $f^{-1}(y)$ nur $\emptyset$ und X , die offensichtlich offen-abgeschlossen sind.

2) Sind alle Mengen der Form $f^{-1}(y)$ offen-abgeschlossen, so kann es außer $\emptyset$ und X keine weiteren Mengen dieser Form geben, weil X zusammenhängend ist. Nach Satz 1.1 aus Kap. I ist dann X $\mathcal{G}$ -zusammenhängend.

Satz 1.9: Die irreduziblen Räume gehören genau dann zur Klasse der $\mathcal{G}$ -zusammenhängenden Räume, wenn $\mathcal{G}$ eine Klasse topologischer Räume ist, deren irreduzible Komponenten einpunktig sind.

Beweis: Spezialfall von Satz 3.1 aus Kap. I.

Bemerkung 1.5: Ist $\mathcal{G}$ eine Klasse von T_2 -Räumen, so ist die Bedingung in Satz 1.9 offenbar erfüllt. Man kann sich aber nicht beschränken auf Klassen $\mathcal{G}$ von T_1 -Räumen, weil es irreduzible T_1 -Räume mit mehr als einem Punkt gibt.

Satz 1.10: Die Klasse $\mathcal{G}_w$ der wegzusammenhängenden Räume ist genau dann eine Unterklasse der Klasse der $\mathcal{G}$ -zusammenhängenden Räume, wenn $\mathcal{G}$ eine Unterklasse der Klasse der total wegunzusammenhängenden Räume ist.

Beweis: Spezialfall von Satz 3.1 aus Kap. I.

3. $\mathcal{G}$ -Zusammenhangskomponenten

Bemerkung 1.6:

1) Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist Ver-

einigung von $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten.

2) Ist $\mathcal{C}$ eine Klasse topologischer Räume, deren irreduzible Komponenten einpunktig sind, so ist jede $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes Vereinigung irreduzibler Komponenten.

3) Man erhält mit Hilfe des Begriffes " $\mathcal{C}$ - Zusammenhang" nicht alle Unterklassen zusammenhängender Räume, z.B. erhält man die irreduziblen Räume nicht, weil sie keine disjunkte Komponentenzerlegung gestatten, wie durch das folgende Beispiel gezeigt wird :

Beispiel 1.1 : Es sei $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ sei mit der natürlichen Topologie versehen, I trage Relativtopologie). Die folgenden Mengen

$$O_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < \frac{1}{4}\}$$

$$O_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}\}$$

$$O_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{3}{8} < x < \frac{5}{4}\}$$

$$O_4 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{5}{8} < x \leq 1\}$$

bilden dann eine endliche offene Überdeckung von I .

Der Quotientenraum $I/\mathbb{R}$ von I nach der von dieser endlichen offenen Überdeckung im Sinne von 2) der Vorbereitungen dieses Kapitels erzeugten Äquivalenzrelation $\mathbb{R}$ besteht dann aus den folgenden Elementen :

$$\omega_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \frac{1}{8}\}, \quad \omega_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}\}$$

$$\omega_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8}\}, \quad \omega_4 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}\}$$

$$\omega_5 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{8}\}, \quad \omega_6 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{5}{8} < x < \frac{3}{4}\}$$

$$\text{und } \omega_7 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{3}{4} \leq x \leq 1\}$$

Der topologische Raum $I/\mathbb{R}$ besitzt dann die folgenden irreduziblen Komponenten :

$$K_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \quad K_2 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} \text{ und } K_3 = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7\}.$$

Offenbar sind die Komponenten nicht alle disjunkt.

Satz 1.11 : Die Aussage "Ist $M \subset X$ (X topologischer Raum) $\mathcal{C}$ - zusammenhängend, so ist auch M $\mathcal{C}$ - zusammenhängend (bzgl. der Relativtopologie) " ist genau

dann gültig, wenn $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen ist.

Korollar: Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen. Weiter seien $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $M, N \in \mathfrak{P}(X)$ mit $M \subset N \subset M^-$. Ist M $\mathcal{C}$ -zusammenhängend, so ist auch N $\mathcal{C}$ -zusammenhängend (bzgl. der Relativtopologie).

Beweis: Satz 1.11 ist bereits durch Satz 1.5 aus Kapitel 1 bewiesen. Wegen $\mathcal{X}_M = (\mathcal{X}_N)_M$ ist M ein $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Unterraum von N und nach Satz 1.11 ist dann auch

$$M\overline{\mathcal{X}}_N = M\overline{\mathcal{X}} \cap N = N$$

$\mathcal{C}$ -zusammenhängend.

Satz 1.12: Die $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes sind genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen ist.

Beweis: trivial nach Satz 1.11.

Satz 1.13: Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen. Ist dann $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $R_{\mathcal{C}}$ die durch die Komponentenzzerlegung von X (nach $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten) gegebene Äquivalenzrelation, so sind die $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten von $X/R_{\mathcal{C}}$ (versehen mit der Quotiententopologie) einpunktig.

Beweis: Es sei $A \subset X/R_{\mathcal{C}}$ abgeschlossen und mindestens zweipunktig. $\omega_{\mathcal{C}}: X \rightarrow X/R_{\mathcal{C}}$ sei die natürliche Abbildung. $\omega_{\mathcal{C}}^{-1}[A]$ kann dann nicht $\mathcal{C}$ -zusammenhängend sein, d.h. es existiert ein $E \in \mathcal{C}$ und eine nicht konstante stetige Abbildung $f: \omega_{\mathcal{C}}^{-1}[A] \rightarrow E$. Die Abbildung h , die dadurch definiert ist, daß das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \omega_{\mathcal{C}}^{-1}[A] & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow \omega_{\mathcal{C}}^* & \nearrow h \\ & A & \end{array}$$

mit $\omega_{\mathcal{C}}^* = (\omega_{\mathcal{C}}|_{\omega_{\mathcal{C}}^{-1}[A]})^{\circledast}$ kommutativ ist, ist wie man leicht nachprüft

^{*)} Für eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ werde mit f' die durch $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in M$ definierte Abbildung von M in $f[M]$ bezeichnet.

stetig und nicht konstant. A kann also nicht $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend sein. Da die $\mathfrak{C}$ -Zusammenhangskomponenten nach Satz 1.12 abgeschlossen sind, folgt die Behauptung.

Für $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume erhält man noch folgende Aussage:

Definition 1.2: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}(X)$ das System der $\mathbb{R}$ -Zusammenhangskomponenten von X , so heißen die für jeden Unterraum $(U, \mathfrak{X}_U)$ von $(X, \mathfrak{X})$ durch

$$k_U(f) = (\alpha_{K(U)})_{K(U)} \in \mathfrak{R}_{K(U)}, \quad (f(x) = \alpha_{K(U)} \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in K(U))$$

für alle $f \in C(U, \mathbb{R})$ definierten Abbildungen

$$k_U : C(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{R}(U)}$$

kanonische Abbildungen.

Satz 1.13: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum. Dann ist für jeden Unterraum $(U, \mathfrak{X}_U)$ von $(X, \mathfrak{X})$ die kanonische Abbildung $k_U : C(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{R}(U)}$ ein injektiver Ringhomomorphismus.

Beweis: trivial

4. Initiale Topologien

a) Die Produkttopologie ist schon in Kapitel 1 erledigt worden.

b) Der projektive Limes

Daß der projektive Limes $\mathfrak{C}$ -zusammenhängender Räume nicht $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend zu sein braucht, wird am Beispiel der $\mathbb{R}$ -zusammenhängenden Räume gezeigt:

Beispiel 1.2: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum, der zusammenhängend und mindestens zweipunktig ist, also z.B. $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$.

Nach Satz 0.8 ist $\varprojlim X_{\mathbb{R}_\alpha}$ nach der schwächsten HAUSDORFFschen Äquivalenzrelation S zur STONE-CECHschen Kompaktifizierung βX homöomorph und folglich vollständig regulär. Da ein vollständig regulärer $\mathbb{R}$ -zusammenhängender Raum höchstens einpunktig ist, kann $\varprojlim X_{\mathbb{R}_\alpha} / S$ nicht $\mathbb{R}$ -zusammenhängend sein.

Wendet man Satz 1.2 aus Kap. I auf die natürliche Abbildung

$\omega : \varprojlim X_{R_\alpha} \rightarrow \varprojlim X_{R_\alpha}/S$ an, so sieht man, daß $\varprojlim X_{R_\alpha}$ kein $\mathbb{R}$ -zusammenhängender Raum sein kann. Andererseits ist jedes X_{R_α} ein endlicher T_0 -Raum, besitzt also nur endlich viele $\mathbb{R}$ -Zusammenhangskomponenten. Da X_{R_α} aber als Quotientenraum eines zusammenhängenden Raumes zusammenhängend ist, muß X_{R_α} $\mathbb{R}$ -zusammenhängend sein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung 1.7: $\mathfrak{C}$ -zusammenhängende Räume haben, falls $\mathfrak{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen ist, eine interessante Eigenschaft. Sie sind für die Erweiterungstheorie topologischer Räume von großem Wert. Ist nämlich $(X, \mathfrak{X})$ ein zusammenhängender Raum, so ist auch X_{R_α} zusammenhängend. Da X_{R_α} als endlicher T_0 -Raum nur endlich viele $\mathfrak{C}$ -Zusammenhangskomponenten besitzen kann, muß X_{R_α} $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend sein. Die Sätze 0.6, 0.7 und 0.8 zeigen dann die Bedeutung "besonders einfach gebauter" $\mathfrak{C}$ -zusammenhängender Räume, wenn man in den Sätzen für $(X, \mathfrak{X})$ einen zusammenhängenden Raum wählt.

Satz 1.15: Es sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen. Dann existiert zu jedem $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden T_0 -Raum eine quasikompakte T_0 -Erweiterung * , die ebenfalls $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend ist und sich als projektiver Limes $\mathfrak{C}$ -zusammenhängender endlicher T_0 -Räume darstellen läßt.

Beweis: Anwendung von Satz 0.6 und Satz 1.11.

c) Das reziproke Bild

Der Begriff " $\mathfrak{C}$ -Zusammenhang" ist nicht invariant gegenüber dem reziproken Bild. Es ist nämlich nicht einmal invariant gegenüber einem speziellen reziproken Bild, der Unterraumtopologie. Im folgenden wird ein Beispiel dafür angeführt, daß auch ein offener Unterraum eines $\mathfrak{C}$ -zusammenhängenden Raumes nicht $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend zu sein braucht, und zwar im Spezialfall der $\mathbb{R}$ -zusammenhängenden Räume:

Beispiel 1.3: Es sei $(X, \mathfrak{X})$ ein $\mathbb{R}$ -zusammenhängender T_1 -Raum mit mindestens zwei Punkten, z.B. der in [19] erwähnte Raum. Sind dann x und y zwei verschiedene Punkte von X , so existieren offene Umgebungen O_x von x und O_y von y mit

$O_x \cap O_y = \emptyset$. $U = O_x \cup O_y$ ist dann, versehen mit der Relativtopologie, ein in X offener Unterraum, der nicht zusammenhängend und folglich nach Satz 1.7 auch nicht $\mathbb{R}$ -zusammenhängend ist.

Im folgenden wird nun ein Kriterium angegeben, wann ein Unterraum eines $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Raumes $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist. Dazu wird folgende Definition vorangeschickt.

Definition 1.3: Es seien $(X, \mathcal{X})$ ein topologischer Raum und $(U, \mathcal{X}_U)$ ein Unterraum von $(X, \mathcal{X})$. Dann heißt $(U, \mathcal{X}_U)$ $C_{\mathcal{C}}$ -eingebettet in $(X, \mathcal{X})$, wenn für alle $Y \in \mathcal{C}$ jede Abbildung $f \in C(U, Y)$ fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung $\tilde{f} \in C(X, Y)$.

Bemerkung 1.8: Für $\mathcal{C} = \{ \mathbb{R} \}$ ist der Begriff " $C_{\mathcal{C}}$ -Einbettung" äquivalent mit dem von GILLMAN und JERISON [7] gebrauchten Begriff " C -embedding".

Satz 1.16: Es sei $(X, \mathcal{X})$ ein $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Raum und $U \subset X$. $(U, \mathcal{X}_U)$ ist d.u.n.d. $\mathcal{C}$ -zusammenhängend, wenn $(U, \mathcal{X}_U)$ $C_{\mathcal{C}}$ -eingebettet in $(X, \mathcal{X})$ ist.

Beweis: 1) Es sei U $C_{\mathcal{C}}$ -eingebettet in X . Sind dann $Y \in \mathcal{C}$ und $f \in C(U, Y)$, so existiert eine Abbildung $\tilde{f} \in C(X, Y)$ mit $\tilde{f}|_U = f$. Da X $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist, muß $\tilde{f}$ und damit f konstant sein. U ist also $\mathcal{C}$ -zusammenhängend.

2) Es sei U $\mathcal{C}$ -zusammenhängend. Für jedes $Y \in \mathcal{C}$ ist $f \in C(U, Y)$ konstant. Da eine Konstante trivialerweise fortsetzbar ist, ist U $C_{\mathcal{C}}$ -eingebettet in X .

d) Das Supremum einer Menge von Topologien

Es wird am Beispiel der $\mathbb{R}$ -zusammenhängenden Räume gezeigt, daß das Supremum eines System $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$ (Supremum bzgl. der durch die Inklusion geordneten Menge der Topologien auf X) keine $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Topologie zu sein braucht. Es wird zunächst folgender Satz bewiesen:

Satz 1.17: Jede Topologie $\mathcal{X}$ auf einer Menge $X \neq \emptyset$ ist darstellbar als Supremum irreduzibler Topologien auf X .

Beweis: Es sei $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$. Für jedes $O \in \mathcal{X}'$ sei $\mathcal{X}_O = \{\emptyset, O, X\}$. $(X, \mathcal{X}_O)$ ist dann ein irreduzibler topologischer Raum. Ferner ist $\sup_{O \in \mathcal{X}'} \mathcal{X}_O = \mathcal{X}$; denn $\mathcal{X}$ ist offensichtlich die grösste derjenigen Topologien, die feiner sind als alle $\mathcal{X}_O$.

Unter Benutzung von Satz 1.17 folgt, daß das Supremum eines Systems R -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$ nicht R -zusammenhängend zu sein braucht, da erstens jeder irreduzible Raum R -zusammenhängend ist (vgl. Satz 1.9) und zweitens nicht jeder topologische Raum R -zusammenhängend ist (z.B. $(R, \text{nat. Top.})$). Der Begriff " $\mathcal{E}$ -Zusammenhang" kann also insbesondere nicht verfeinerungstreu sein.

5. Finale Topologien

a) Quotiententopologie

Satz 1.18: Jeder Quotientenraum eines $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Raumes ist $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

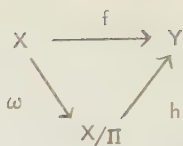
Beweis: Anwendung von Satz 1.2 aus Kapitel I auf die kanonische Abbildung.

Bemerkung 1.9: Die Umkehrung des Quotientensatzes gilt nicht:

$(R, \text{nat. Top.})$ ist nicht R -zusammenhängend, während der Quotientenraum von R nach der von einer endlichen offenen Überdeckung erzeugten Äquivalenzrelation R (im Sinne von "Vorbereitungen 2") R -zusammenhängend ist. Es gilt jedoch eine abgeschwächte Umkehrung wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.19: Ist X ein topologischer Raum, Π eine Äquivalenzrelation in X , der Quotientenraum X/Π $\mathcal{E}$ -zusammenhängend und jede Äquivalenzklasse von X (bzgl. Π) $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, so ist X $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

Beweis: Es seien $Y \in \mathcal{E}$ und $f \in C(X, Y)$. $h: X/\Pi \rightarrow Y$ sei dadurch definiert, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:



wobei ω die natürliche Abbildung bedeutet.

Dann ist h erstens wohldefiniert und zweitens stetig :

1) Es sei $\omega(x) = \omega(x')$ mit $(x, x') \in X \times X$. Nach Definition ist

dann :

$$h(\omega(x)) = f(x) \quad \text{und} \quad h(\omega(x')) = f(x')$$

Da $x' \in \omega(x)$ und $f|_{\omega(x)} \in C(\omega(x), Y)$ ($\omega(x)$ ist mit der von X induzierten Topologie versehen) und $\omega(x)$ nach Voraussetzung $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist, also $f(x') = c = \text{const.}$ gilt, folgt $f(x) = f(x') = c$ und somit $h(\omega(x)) = h(\omega(x'))$.

2) Da $f = h \circ \omega$ stetig ist und X/Π Quotiententopologie trägt, folgt, daß h stetig ist.

Da nach Voraussetzung h konstant ist, weil $h \in C(X/\Pi, Y)$ und X/Π $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist, muß auch f konstant sein.

b) Summenbildung

Der Begriff " $\mathcal{C}$ -Zusammenhang" ist nicht invariant gegenüber Bildung von Summenräumen. Da die Summe zweier $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Räume nicht zusammenhängend ist, kann sie nach Satz 1.7 auch nicht $\mathcal{C}$ -zusammenhängend sein.

c) Das Infimum einer Menge von Topologien

Satz 1.20: $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ sei ein System $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$. Dann ist auch das Infimum dieser Topologien eine $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Topologie.

Beweis: Da $\inf_{i \in I} \mathcal{X}_i = \mathcal{X}$ definiert ist als feinste derjenigen Topologien auf $X \neq \emptyset$, die größer sind als alle $\mathcal{X}_i$, folgt die Behauptung unmittelbar aus Kapitel 1, Satz 1.7.

d) Der induktive Limes

Bemerkung 1.10: Der induktive Limes $\varinjlim X_\alpha$ eines induktiven Systems topologischer Räume $(X_\alpha, \varphi_\beta^\alpha)_{\alpha \in I}$ bzgl. einer geordneten, absteigend filtrierenden Indexmenge I gehört zu den finalen topologischen Strukturen, weil die Topologie von $\varinjlim X_\alpha$ erklärt werden kann als feinste Topologie von $\varinjlim X_\alpha$, für die alle kanonischen Abbildungen $\varphi_\alpha: X_\alpha \rightarrow \varinjlim X_\alpha$ stetig sind (vgl. [13], [2] und [1]).

Satz 1.21: Der induktive Limes $\varinjlim X_\alpha$ eines induktiven Systems $\mathfrak{E}$ -zusammenhängender Räume $(X_\alpha, \varphi_\beta^\alpha)_{\alpha \in I}$ bzgl. einer geordneten, absteigend filtrierenden Indexmenge I ist $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend.

Beweis: Es seien $Y \in \mathfrak{E}$ und $f \in C(\varinjlim X_\alpha, Y)$. Da $\varinjlim X_\alpha$ zu den finalen topologischen Strukturen gehört, ist eine Abbildung $f: \varinjlim X_\alpha \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \varphi_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$ stetig ist für alle $\alpha \in I$. Es seien $x, y \in \varinjlim X_\alpha$; dann ist wegen $\varinjlim X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_\alpha[X_\alpha]: x \in \varphi_\alpha[X_\alpha]$ und $y \in \varphi_\beta[X_\beta]$ mit $\alpha, \beta \in I$. Da I absteigend filtrierend ist, existiert ein $\gamma \in I$ mit $\gamma \leq \alpha$ und $\gamma \leq \beta$. Wegen

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha[X_\alpha] &= (\varphi_\gamma \circ \varphi_\gamma^\alpha)[X_\alpha] \subset \varphi_\gamma[X_\gamma] \quad \text{und} \\ \varphi_\beta[X_\beta] &= (\varphi_\gamma \circ \varphi_\gamma^\beta)[X_\beta] \subset \varphi_\gamma[X_\gamma]\end{aligned}$$

gilt $x, y \in \varphi_\gamma[X_\gamma]$. Dann sind $f(x)$ und $f(y)$ Elemente von $(f \circ \varphi_\gamma)[X_\gamma]$ und da $f \circ \varphi_\gamma: X_\gamma \rightarrow Y$ stetig und nach Voraussetzung über X_γ konstant ist, folgt $f(x) = f(y)$. Da $x, y \in \varinjlim X_\alpha$, $f \in C(\varinjlim X_\alpha, Y)$ und $Y \in \mathfrak{E}$ beliebig waren, folgt, daß $\varinjlim X_\alpha$ $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend ist.

6. Charakterisierung der Klasse der $\mathfrak{E}$ -zusammenhängenden Räume

Theorem 1.22: Zu einer Klasse $\mathfrak{R}$ topologischer Räume gibt es genau dann eine Klasse $\mathfrak{E}$ topologischer T_1 -Räume mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}^+$, wenn gilt:

- 1) Sind Y, Y topologische Räume, $f \in C(X, Y)$ und $X \in \mathfrak{R}$, so

gilt $f[X] \in \mathcal{R}$.

2) Ist $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, so ist

$\mathcal{M} = \{M \mid M \subset X \text{ und } M \in \mathcal{R}\} \neq \{\emptyset\}$ und $(\mathcal{M}, \subset)$ induktiv geordnet.

3) Ist X ein topologischer Raum und sind A und B nicht disjunkte, zu $\mathcal{R}$ gehörige Unterräume von X , so gilt $A \cup B \in \mathcal{R}$.

4) Ist X ein topologischer Raum und A ein zu $\mathcal{R}$ gehöriger Unterraum von X , so gilt $A^- \in \mathcal{R}$.

5) Ist X ein topologischer Raum, R eine Faserung von X nach maximalen Teilmengen M mit $M \in \mathcal{R}$ und $M^* \subset X/R$ mit $M^* \in \mathcal{R}$ und $M^* \neq \emptyset$, so ist M^* einpunktig.

Bemerkung 1.11: Die Axiome 1), 2) und 3) in Theorem 1.22 besagen, daß nach Definition 3.1 und Definition 3.2 aus Kapitel I $\mathcal{R}$ eine disjunkte Komponenten-kategorie ist. 4) bedeutet, daß die Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ eines topologischen Raumes X abgeschlossen in X sind.

Beweis des Theorems:

1) Gilt $\mathcal{R} = \mathcal{C}$, so sind die Axiome 1) - 5) erfüllt (Kapitel I: Satz 1.2, Satz 1.3, Lemma 1.1, Satz 1.5; Kapitel II: Satz 1.13)

2) Es seien 1) - 5) erfüllt. $\mathcal{C}$ sei die Klasse aller topologischen Räume, deren Komponenten bzgl. $\mathcal{R}$ einpunktig sind.

a) Nach Kapitel I, Satz 3.1 gilt $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}^+$.

b) Es sei $X \in \mathcal{C}^+$. Nach 5) gilt $X/R \in \mathcal{C}$. Folglich muß die natürliche Abbildung $\omega: X \rightarrow X/R$ konstant sein; X besitzt also nur eine Komponente bzgl. $\mathcal{R}$, d.h. $X \in \mathcal{R}$. Es gilt also $\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{R}$.

Aus a) und b) folgt $\mathcal{R} = \mathcal{C}^+$. Wegen Axiom 4) ist $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 -Räumen. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Bemerkung 1.12:

a) Alle Sätze über $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Räume ($\mathcal{C}$: Klasse von

T_1 - Räumen), die nicht durch Axiome 1) - 5) erfaßt werden, wie etwa der Produktsatz, die spezialisierte Umkehrung des Quotientensatzes oder der Satz über den induktiven Limes, sind abgeleitete Sätze; sie sind automatisch erfüllt, wenn 1) - 5) gilt.

b) Die Axiome 1), 2) und 3) sind auch für die Klasse der wegzusammenhängenden Räume erfüllt, jedoch nicht 4) und 5), wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1.4:

$$X = \{ (x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq +1 \} \subset \mathbb{R}^2$$

$$Y = \{ (x, y) \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \} \subset \mathbb{R}^2$$

$Z = X \cup Y$ besitzt zwei Wegkomponenten, nämlich X und Y . $Z/\mathbb{R}$ ist also zweipunktig. Da keiner der beiden Punkte offen ist, gilt $Z/\mathbb{R} = D_2$ und D_2 ist wegzusammenhängend. Außerdem ist $Y^- = Z$ nicht wegzusammenhängend.

7. Beispiele $\mathbb{R}$ - zusammenhängender Räume

Bemerkung 1.13: In der Theorie des Funktionenringes $C(X, \mathbb{R})$ beschäftigt man sich u.a. mit der Frage, wie man Eigenschaften eines topologischen Raumes X algebraisch durch seinen Funktionenring $C(X, \mathbb{R})$ charakterisieren kann, z.B. die Eigenschaft eines topologischen Raumes zusammenhängend zu sein (vgl. [7]). Gelingt es nun zwei $\mathbb{R}$ - zusammenhängende Räume anzugeben, von denen der eine eine topologische Eigenschaft besitzt, der andere sie jedoch nicht besitzt, so ist damit gezeigt, daß diese Eigenschaft nicht algebraisch durch $C(X, \mathbb{R})$ ausgedrückt werden kann, weil sonst alle $\mathbb{R}$ - zusammenhängenden Räume diese Eigenschaft haben müßten. Nach Satz 1.5 haben nämlich alle $\mathbb{R}$ - zusammenhängenden Räume bis auf Isomorphie denselben Funktionenring. In diesem Sinne sind die folgenden Beispiele zusammengestellt.

(1) Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

a) Ein $\mathbb{R}$ - zusammenhängender Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist von URYSOHN in [19] konstruiert worden.

b) Es sei M eine Menge mit $\text{card}(M) > \text{card}(\mathbb{N})$
($\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen). Dann ist durch

$$\mathfrak{M} = \{ M \setminus E \mid E \subset M \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset, M \}$$

eine Topologie auf M erklärt, derart daß $(M, \mathfrak{M})$ irreduzibel ist und nach Satz 1.9 $\mathbb{R}$ -zusammenhängend ist. $(M, \mathfrak{M})$ besitzt jedoch keine abzählbare Basis, erfüllt also nicht das II. Abzählbarkeitsaxiom. Denn angenommen $\mathcal{B}$ sei eine abzählbare Basis und $x \in M$ sei ein beliebiges Element von M . Dann ist $D = \bigcap_{\substack{O \in \mathfrak{M} \\ x \in O}} O = \{x\}$;

denn wäre $y \in \bigcap_{\substack{O \in \mathfrak{M} \\ x \in O}} O$ mit $y \neq x$, so kommt $M \setminus \{y\}$ wegen $M \setminus \{y\} \in \mathfrak{M}$ und $x \in M \setminus \{y\}$ unter den offenen Mengen O vor, aus denen der Durchschnitt D gebildet ist. Es müßte also $y \in M \setminus \{y\}$ sein, was nicht möglich ist. Also gilt

$$\{x\} = \bigcap_{\substack{O \in \mathfrak{M} \\ x \in O}} O = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ x \in B}} B$$

Da $\mathcal{B}$ abzählbar ist, folgt, daß $M \setminus \{x\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (M \setminus B)$

als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar ist. Damit ist M abzählbar im Widerspruch zu $\text{card}(M) > \text{card}(\mathbb{N})$.

(2) Das erste Abzählbarkeitsaxiom

a) $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind alle diejenigen, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

b) $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume, die das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllen, kann man sich wie folgt verschaffen: Es sei I eine Menge mit $\text{card}(I) > \text{card}(\mathbb{N})$ und jedes $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ sei $\mathbb{R}$ -zusammenhängend mit $\mathfrak{X}_i \setminus \{\emptyset, X_i\} \neq \{\emptyset\}$. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ nach Satz 1.6 aus Kapitel 1 $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, erfüllt aber bekanntlich nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(3) Quasikompakt

a) Es gibt quasikompakte $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume, z.B. $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ oder

$\text{Spec} (K[X_1])$ (K : Körper) oder das Beispiel unter (1) b).
 $x \in I$

b) Der im folgenden konstruierte $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Raum ist nicht quasikompakt: Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen werde mit der "Rechts"-Topologie τ (vgl. [2], chap. 1, § 1, ex. 2a)) versehen, d.h. mit einer "entarteten" Ordnungstopologie, die als Basis die folgenden Intervalle

$$I_x = \{y \mid y \geq x, y \in \mathbb{R}\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Dann ist $(\mathbb{R}, \tau)$ irreduzibel und nach Satz 1.9 $\mathbb{R}$ -zusammenhängend; denn seien $O_1, O_2 \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, so existieren Elemente $y_1 \in I_{x_1} \subset O_1$ und $y_2 \in I_{x_2} \subset O_2$. Gilt o.B.d.A. $x_1 \leq x_2$, so folgt $I_{x_1} \cap I_{x_2} = I_{x_2} \subset O_1 \cap O_2$, also $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Da $O_1, O_2 \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ beliebig waren, folgt nach Definition 0.1 der Vorbereitungen dieses Kapitels, daß $(\mathbb{R}, \tau)$ irreduzibel ist. Ferner ist $(\mathbb{R}, \tau)$ nicht quasikompakt. Wäre $(\mathbb{R}, \tau)$ quasikompakt, so gäbe es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von $(\mathbb{R}, \tau)$ eine endliche Teilüberdeckung, also auch zu $\mathcal{U} = \{I_x \mid x \in \mathbb{R}\}$, d.h. es gilt $\bigcup_{i=1}^n I_{x_i} = \mathbb{R}$. Es sei o.B.d.A. $x_1 = \min \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann¹⁼¹ werden alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < x_1$ nicht von den I_{x_i} ($i = 1, \dots, n$) überdeckt.

(4) Trennungsaxiome T_0, T_1, T_2, T_3 , regulär (d.h. T_1 und T_3)

a) Reguläre $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume sind in [5], [11] und [16] angegeben. Sie erfüllen damit auch die Axiome T_0, T_1, T_2 und T_3 .

b) Es sei M eine Menge mit $\text{card}(M) \geq 2$. Dann ist $(M, \{\emptyset, M\})$ $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, erfüllt aber kein einziges Trennungsaxiom.

(5) Irreduzibel

a) Alle irreduziblen Räume sind $\mathbb{R}$ -zusammenhängend (Satz 1.9).

b) Während die irreduziblen Räume bereits unter der Forderung des T_2 -Axioms entarten, gibt es nach (4) a) nicht entartete reguläre $\mathbb{R}$ -zusammenhängende Räume. Diese können also nicht irreduzibel sein.

§ 2 $\mathfrak{C}$ - diskontinuierliche Räume

1. Zur Definition äquivalente und universelle Charakterisierungen

Satz 2.1 : Die Klasse $(\mathfrak{C}^+)^-$ ist identisch mit der Klasse $D\mathfrak{C}$ der $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlichen Räume.

Beweis : Spezialfall von Satz 2.1 aus Kapitel I.

Satz 2.2 : Es ist $((\mathfrak{C}^+)^-)^+ = \mathfrak{C}^+$ und jede $(\mathfrak{C}^+)^-$ umfassende Klasse $\hat{\mathfrak{C}}$ topologischer Räume mit $\hat{\mathfrak{C}}^+ \supset \mathfrak{C}^+$ ist mit $(\mathfrak{C}^+)^-$ identisch.

Beweis : Spezialfall von Satz 2.4 aus Kapitel I.

Bemerkung 2.1 : $\mathbb{R}$ - zusammenhängende Räume können durch die Klasse der vollständig regulären Räume oder durch die Klasse der $\mathbb{R}$ - diskontinuierlichen Räume erzeugt werden. Letztere kann nach obigem Satz nicht mehr erweitert werden durch Hinzunahme weiterer Räume. Sie ist umfassender als die Klasse der vollständig regulären Räume; denn zu ihr gehören auch noch topologische Räume X mit folgender Eigenschaft: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ existiert eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Solche Räume sind offenbar $\mathbb{R}$ - diskontinuierlich; denn wäre K eine $\mathbb{R}$ - Zusammenhangskomponente von X , die nicht einpunktig ist, so existieren zwei Elemente $x_1, x_2 \in K$ mit $x_1 \neq x_2$ und nach Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. $f|_K: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann ebenfalls stetig und nicht konstant im Widerspruch zur Voraussetzung, daß K $\mathbb{R}$ - zusammenhängend ist. VAN EST und FREUDENTHAL[5] haben gezeigt, daß die Klasse der durch obige Eigenschaft gekennzeichneten topologischen Räume (loc. cit. mit $p \tau_s q$ bezeichnet) umfassender ist als die der vollständig regulären Räume.

Satz 2.3 : Es seien $(X, \mathfrak{X})$ ein topologischer Raum und $\mathfrak{C}$ eine Klasse von T_1 - Räumen. Weiter seien $X/R_{\mathfrak{C}}$ die mit der Quotiententopologie versehene Menge der Äquivalenzklassen, die sich durch Zerlegung von X in seine $\mathfrak{C}$ - Zusammenhangskomponenten ergibt, und $\omega_{\mathfrak{C}}: X \rightarrow X/R_{\mathfrak{C}}$ die natürliche Abbildung. Dann gilt:

1) $(\omega_{\mathcal{E}}, \omega_{\mathcal{E}} X)$ ist eine $\mathcal{E}$ -diskontinuierliche Erweiterung von X .

2) $(\omega_{\mathcal{E}}, \omega_{\mathcal{E}} X)$ ist Lösung des folgenden universellen Abbildungsproblems :
 Gesucht ist ein $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher Raum Y und eine stetige Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$, so daß für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Z$ von X in einen $\mathcal{E}$ -diskontinuierlichen Raum Z genau eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow Z$ existiert mit $f = g \circ \varphi$. Insbesondere ist also $\omega_{\mathcal{E}} X$ eine $D\mathcal{E}$ -fortsetzbare Erweiterung von X .

Bemerkung 2.2 : $\omega_{\mathcal{E}} X$ kann nach ISBELL [12] gedeutet werden als "D $\mathcal{E}$ -reflection". Zu jedem $f \in C(X, Y)$ existiert genau eine Abbildung $\Omega_{\mathcal{E}}(f) \in C(\Omega_{\mathcal{E}}(X), \Omega_{\mathcal{E}}(Y))$ derart, daß das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \omega_{\mathcal{E}}' \downarrow & & \downarrow \omega_{\mathcal{E}}'' \\ \Omega_{\mathcal{E}}(X) = \omega_{\mathcal{E}}' X & \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{E}}(f)} & \omega_{\mathcal{E}}'' Y = \Omega_{\mathcal{E}}(Y) \end{array}$$

kommutativ wird. Insbesondere ist der reflection-Funktor $\Omega_{\mathcal{E}}$ kovariant und hat die Eigenschaft $\Omega_{\mathcal{E}}^2 = \Omega_{\mathcal{E}}$.

Beweis von Satz 2.3 :

- 1) vgl. Satz 1.13 und Definition 0.4.
- 2) trivial

Satz 2.4 : Für eine Klasse $\mathcal{E}$ von T_1 -Räumen sind äquivalent :

- 1) $X \in D\mathcal{E}$
- 2) Jede mindestens zweipunktige, abgeschlossene Teilmenge A von X ist Vereinigung in A $\mathcal{E}$ -abgeschlossener echter Teilmengen von A .
- 3) Zu jeder mindestens zweipunktigen Teilmenge M von X existiert ein $E \in \mathcal{E}$ und eine stetige nicht konstante Abbildung $f : M \rightarrow E$.
- 4) Zu jeder mindestens zweipunktigen, abgeschlossenen Teilmenge A von X

existiert ein $E \in \mathfrak{E}$ und eine stetige, nicht konstante Abbildung $f: A \rightarrow E$.

5) Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X , die nicht $\mathfrak{E}$ -regulär ist, existiert ein $E \in \mathfrak{E}$ und eine nicht konstante stetige Abbildung $f: A \rightarrow E$.

6) X gehört zur größten Klasse $\mathfrak{R}$ topologischer Räume mit der Eigenschaft $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{E}^+$.

7) $\omega_{\mathfrak{E}}$ ist ein Homöomorphismus

8) $\omega_{\mathfrak{E}}$ ist injektiv

9) Jede $D \in \mathfrak{E}$ -fortsetzbare Erweiterung von X ist eine Einbettung.

Bemerkung 2.3: Für 3) und 6) braucht $\mathfrak{E}$ keine Klasse von T_1 -Räumen zu sein.

Beweis von Satz 2.4: Die Äquivalenz von 1) mit 3), 4), 5), 7) und 8) ist trivial; die Äquivalenz von 1) mit 2) folgt aus Satz 1.2, die Äquivalenz von 1) mit 6) aus Satz 2.1 und Satz 2.2.

1) $\Rightarrow$ 9): Es sei $X \in D \in \mathfrak{E}$ und $r: X \rightarrow Y$ eine $D \in \mathfrak{E}$ -fortsetzbare Erweiterung von X . Dann existiert $g \in C(r(X), \omega_{\mathfrak{E}}(X))$, so daß $g \circ r = \omega_{\mathfrak{E}}$ ist. Da $\omega_{\mathfrak{E}}$ nach 7) ein Homöomorphismus ist, folgt, daß r ein Homöomorphismus - in Y ist, also $(r, r(X))$ eine Einbettung.

9) $\Rightarrow$ 1): Anwendung von Satz 2.3 liefert: $\omega_{\mathfrak{E}}: X \rightarrow \omega_{\mathfrak{E}}(X)$ ist eine Einbettung. Also gilt 8) und damit 1).

Eine Charakterisierung der Klasse $D \in \mathfrak{E}$ liefert der folgende Satz:

Satz 2.5: Folgende Aussagen sind für eine Klasse $\mathfrak{F}$ topologischer Räume äquivalent:

1) $\mathfrak{F} = D \in \mathfrak{E}$

2) $\mathfrak{F} = (\mathfrak{E}^+)^-$

3) $\mathfrak{F}$ ist die größte Klasse mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}^+ = \mathfrak{E}^+$

Ist $\mathfrak{E}$ eine Klasse von T_1 -Räumen, so sind 1) - 3) außerdem äquivalent zu

4) $\Omega_{\mathfrak{E}}|_{\mathfrak{F}}$ ist der identische Funktor.

Beweis : Erledigt durch Satz 2.1, Satz 2.2 und Satz 2.3.

2. Klassifikation der $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlichen Räume

Satz 2.6 : Jeder total diskontinuierliche Raum ist $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlich.

Beweis : Man wende Satz 1.7 an.

Satz 2.7 : Ist $\mathfrak{C}$ eine Klasse von T_2 -Räumen, so gilt für einen topologischen Raum $(X, \mathfrak{X})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & X \mathfrak{C} - \text{kompakt} & & & \\
 & & & \Downarrow (1) & & & \\
 & & & X \mathfrak{C} - \text{normal} & & & \\
 & & & \Downarrow (2) & & & \\
 (3) & & & & (4) & & (5) \\
 X \text{ nulldimensional} & \Rightarrow & X \mathfrak{C} - \text{regulär} & \Rightarrow & X \mathfrak{C} - \text{diskontinuierlich} & \Rightarrow & X \text{ } T_1 \text{-Raum}
 \end{array}$$

Beweis : (1), (2) und (3) ist durch die Sätze 0.11 und 0.12 bewiesen. (4) wird wie folgt bewiesen : Da ein $\mathfrak{C}$ - regulärer Raum X nach Satz 0.10 identisch ist (bis auf Homöomorphie) mit einem Unterraum eines Produktes von Räumen aus $\mathfrak{C}$ und nach Satz 2.3 aus Kapitel I $\mathfrak{C} \subset D \mathfrak{C}$ gilt, liefert die Anwendung von Satz 2.8 aus Kapitel I (vgl. auch Kap. I, Bemerkung 2.3), daß $X \mathfrak{C}$ - diskontinuierlich ist. Wegen Satz 1.12 dieses Kapitels ist auch (5) gültig.

Bemerkung 2.4 : Die Implikation (5) des vorangegangenen Satzes gilt nach Satz 1.12 auch dann, wenn $\mathfrak{C}$ eine Klasse von T_1 - Räumen ist. Ist $\mathfrak{C}$ eine Klasse uniformer T_1 -Räume, so gilt entsprechend :

(5') X uniform $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlich $\Rightarrow X$ uniformer T_1 -Raum.

Obwohl weder (5) noch (5') umkehrbar sind, gilt folgende Aussage :

Die Klasse $\mathfrak{T}_1$ aller T_1 -Räume kann aufgefaßt werden als Klasse $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlicher Räume, nämlich

$$\mathfrak{T}_1 = D \mathfrak{T}_1 = (\mathfrak{T}_1^+)^-, \text{ d.h. es ist } \mathfrak{C} = \mathfrak{T}_1 \text{ zu wählen.}$$

Entsprechendes gilt für die Klasse der uniformen T_1 - Räume.

3. Initiale Topologien

In diesem Abschnitt ist unter $\mathfrak{K}$ eine Klasse topologischer Räume zu verstehen.

Satz 2.8: Es seien M eine Menge, $(Y_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha \in I}$ topologische Räume, $f_\alpha: M \rightarrow Y_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ Abbildungen mit der Eigenschaft: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in M$ existiert ein $\alpha \in I$, so daß $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ gilt. Gehören dann alle Y_α zu $\mathcal{R}^-$, so ist auch M versehen mit der grössten Topologie $\mathcal{M}$ bzgl. der alle f_α stetige Abbildungen sind ein Element von $\mathcal{R}^-$.

Korollare: 1) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung reziproker Bilder bzgl. injektiver Abbildungen. Speziell ist $\mathcal{R}^-$ abgeschlossen gegenüber Bildung von Unterräumen.

2) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung von Produkten und projektiven Limites.

3) $\mathcal{R}^-$ ist abgeschlossen gegenüber Bildung des Supremums durch $\mathcal{R}^-$ bestimmter Strukturen auf einer Menge $X \neq \emptyset$.

Beweis: Spezialfall von Satz 2.8 aus Kap. I.

Satz 2.9: Es sei $f \in C(X, Y)$ injektiv und $Y \in \mathcal{R}^-$.

Dann gilt $X \in \mathcal{R}^-$.

Beweis: Spezialfall von Satz 2.8 aus Kap. I.

Bemerkung 2.5: Die in diesem Abschnitt aufgeführten Sätze gelten für die Klasse $\mathcal{D} \subseteq$ der $\mathcal{C}$ -diskontinuierlichen Räume und damit nach Bemerkung 2.4 für die Klasse aller T_1 -Räume, sie gelten aber auch für die Klasse der total wegunzusammenhängenden Räume (vgl. auch Bemerkung 3.2 aus Kap. I).

4. Finale Topologien

Satz 2.10: Eine Summe $\sum_{i \in I} X_i$ topologischer Räume $(X_i, \mathcal{X}_i)$ ($i \in I$) ist genau

dann $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich, wenn jeder Summand X_i $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich ist.

Beweis: 1) Sind alle X_i $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich und ist K eine $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente von $\sum_{i \in I} X_i$, so ist K nach Satz 1.7 zusammenhängend und kann folglich

nicht Elemente aus verschiedenen X_i enthalten, d.h. K ist ganz in einem X_j

mit $j \in I$ enthalten und folglich einpunktig.

2) Ist $\sum_{i \in I} X_i \mathfrak{C}$ - diskontinuierlich, so ist wegen der Erbllichkeit des Begriffes

" $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlich" auch jedes $X_i \mathfrak{C}$ - diskontinuierlich.

Bemerkung 2.6 : Der Quotientensatz kann selbstverständlich nicht gelten, weil er bereits für T_1 -Räume falsch ist.

§ 3 Beziehungen zwischen den Klassen der $\mathfrak{C}$ - zusammenhängenden, $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlichen, $\mathfrak{C}$ - regulären, $\mathfrak{C}$ - normalen und $\mathfrak{C}$ - kompakten Räume

Bemerkung 3.1 : Durch die Sätze 2.1 und 2.4 aus Kapitel I ist bereits gezeigt, daß sich aus der Klasse der $\mathfrak{C}$ - zusammenhängenden Räume die Klasse der $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlichen Räume berechnen läßt und umgekehrt. Satz 2.6 aus Kapitel I gestattet die folgende wichtige Aussage :

Satz 3.1 : Für eine Klasse $\mathfrak{C}$ von T_2 -Räumen gilt die Aussage :

Aus jeder der Klassen $K \mathfrak{C}$, $N \mathfrak{C}$ und $R \mathfrak{C}$ läßt sich die Klasse $\mathfrak{C}^+$ der $\mathfrak{C}$ - zusammenhängenden Räume bzw. die Klasse $D \mathfrak{C}$ der $\mathfrak{C}$ - diskontinuierlichen Räume durch

$$(K \mathfrak{C})^+ = (N \mathfrak{C})^+ = (R \mathfrak{C})^+ = \mathfrak{C}^+$$

bzw. durch

$$D(K \mathfrak{C}) = D(N \mathfrak{C}) = D(R \mathfrak{C}) = D \mathfrak{C}$$

berechnen.

Beweis : Nach Satz 2.7 dieses Kapitel gilt

$$\mathfrak{C} \subset K \mathfrak{C} \subset N \mathfrak{C} \subset R \mathfrak{C} \subset D \mathfrak{C}, \quad \text{woraus}$$

durch Anwendung von Satz 2.6 aus Kapitel I unmittelbar die Behauptung folgt.

Satz 3.2 : Für äquivalente Klassen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ von T_2 -Räumen gilt :

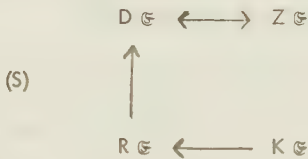
$$D \mathfrak{C} = D \mathfrak{F} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^+ = \mathfrak{F}^+.$$

Beweis: Nach Definition 0.4, h) gilt $K \mathfrak{E} = K\mathfrak{F}$, woraus nach Satz 3.1 die Behauptung folgt.

Satz 3.3: Es gilt $D \mathfrak{E} = DD \mathfrak{E}$.

Beweis: Anwendung von Satz 2.1 und Satz 2.2.

Bemerkung 3.2: Bezeichnet man die Klasse $\mathfrak{E}^+$ der $\mathfrak{E}$ -zusammenhängenden Räume mit $Z \mathfrak{E}$ und berücksichtigt man die Beziehung $R(K \mathfrak{E}) = R \mathfrak{E}$, so bestimmen sich die Klassen $K \mathfrak{E}$, $R \mathfrak{E}$, $D \mathfrak{E}$ und $Z \mathfrak{E}$ nach folgendem Schema:



Das folgende Beispiel zeigt, daß sich aus der Klasse $D \mathfrak{E}$ nicht die Klasse $R \mathfrak{E}$ bestimmen läßt, d.h. daß es Klassen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ gibt mit $D \mathfrak{E} = D \mathfrak{F}$, aber $R \mathfrak{E} \neq R \mathfrak{F}$:

Beispiel 3.1: Man wähle $\mathfrak{E} = \{D_2\}$ und $\mathfrak{F} = \{X\}$, wobei X den Unterraum aller Punkte des reellen separablen Hilbert-Raumes mit rationalen Koordinaten bedeutet. Insbesondere ist X total diskontinuierlich, aber nicht nulldimensional. Es gilt also $\mathfrak{E}^+ = \mathfrak{F}^+$ und damit $D \mathfrak{E} = D \mathfrak{F}$. Da $R \mathfrak{E} = R\{D_2\}$ genau aus den nulldimensionalen Räumen besteht und $X \in R\{X\}$ nicht nulldimensional ist, können $R\{D_2\}$ und $R\{X\}$ nicht identisch sein.

Bemerkung 3.3: Nach Satz 2.7 impliziert die $\mathfrak{E}$ -Regularität die $\mathfrak{E}$ -Diskontinuirlichkeit. Die Umkehrung ist bereits für $\mathfrak{E} = \{D_2\}$ falsch; denn nach dem vorangehenden Beispiel gibt es total diskontinuierliche Räume (d.h. $\{D_2\}$ -diskontinuierliche Räume), die nicht nulldimensional (d.h. $\{D_2\}$ -regulär) sind. Aus Kompaktheit und $\mathfrak{E}$ -Diskontinuirlichkeit läßt sich für $\mathfrak{E} = \{D_2\}$ bekanntlich auf $\mathfrak{E}$ -Regularität schließen. Ob dieser Sachverhalt für beliebige Klassen $\mathfrak{E}$ von T_2 -Räumen gültig bleibt, ist nicht bekannt. Es gilt aber folgender Satz:

Satz 3.4: Eine Klasse $\mathcal{C}$ von T_2 -Räumen sei entweder eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume oder habe die Eigenschaft, daß ein Produkt von Räumen aus $\mathcal{C}$ einen Bogen als Unterraum besitzt. Dann gilt: Ein kompakter Raum X ist genau dann $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich, wenn er $\mathcal{C}$ -regulär ist.

Beweis: 1) a) Ist $\mathcal{C}$ eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume, d.h. $\mathcal{C} \subset D\{D_2\}$, so gilt $D\mathcal{C} \subset D D\{D_2\} = D\{D_2\}$. Jeder $\mathcal{C}$ -diskontinuierliche Raum ist also total diskontinuierlich. Nach Satz 0.13 ist X dann $\mathcal{C}$ -kompakt und nach Satz 0.11 $\mathcal{C}$ -regulär.

b) Hat $\mathcal{C}$ die Eigenschaft, daß ein Produkt von Räumen aus $\mathcal{C}$ einen Bogen als Unterraum besitzt, so gilt $\{[0,1]\} \subset R\mathcal{C}$, woraus $R\{[0,1]\} \subset R R\mathcal{C} = R\mathcal{C}$ folgt. Wegen $K\{[0,1]\} \subset R\{[0,1]\}$ ist also jeder kompakte Raum $\mathcal{C}$ -regulär.

2) Die Umkehrung gilt stets.

Bemerkung 3.4: Nebenbei sei erwähnt, daß für eine Klasse $\mathcal{C}$ von T_2 -Räumen folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Es existiert ein Produkt von Räumen aus $\mathcal{C}$, das einen Bogen als Unterraum besitzt.

$$b) K\{[0,1]\} \subset R\mathcal{C}$$

$$c) K\{[0,1]\} \subset K\mathcal{C}$$

Im folgenden wird noch eine Bedingung an $\mathcal{C}$ angegeben, die es gestattet, aus Kompaktheit auf $\mathcal{C}$ -Diskontinuirlichkeit zu schließen.

Satz 3.5: Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse topologischer Räume mit $\mathcal{C}^+ = \{[0,1]\}^+$. Dann gilt: Jeder kompakte Raum ist $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich.

Beweis: Aus der Voraussetzung über $\mathcal{C}$ folgt $D\mathcal{C} = D\{[0,1]\}$, woraus wegen $K\{[0,1]\} \subset D\{[0,1]\}$ unmittelbar die Behauptung folgt.

Bemerkung 3.5: Nicht alle kompakten Räume sind $\mathcal{C}$ -diskontinuierlich. Man braucht für $\mathcal{C}$ nur eine Klasse zu wählen mit der Eigenschaft

$$\mathcal{C}^+ \not\subset \{[0,1]\}^+ = \{R\}^+ = (R[0,1])^+.$$

Satz 3.6 : Es sei Y ein T_1 - Raum und $\mathcal{C}$ eine Klasse topologischer Räume mit $\mathcal{C}^+ = \{Y\}^+$. Dann existiert ein mindestens zweipunktiger regulärer $\mathcal{C}$ - zusammenhängender Raum.

Beweis : Anwendung von Satz 0.14.

Bemerkung 3.6 : Satz 3.6 ist die direkte Verallgemeinerung eines Ergebnisses von HEWITT [11], der gezeigt hat, daß es nicht triviale R - zusammenhängende Räume gibt, die regulär sind. Dieses Ergebnis ist insofern tieflegend, weil der Begriff " R - Zusammenhang" offenbar unter der Forderung der vollständigen Regularität entartet. Wann die Begriffe "Zusammenhang" und " $\mathcal{C}$ - Zusammenhang" koinzidieren, zeigt der folgende Satz :

Satz 3.7 : Die Klasse der $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Räume ist genau dann mit der Klasse der zusammenhängenden Räume identisch, wenn $\mathcal{C}$ eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist.

Beweis : Man wende Satz 3.1 aus Kapitel 1 auf die Komponentenkategorie $\mathcal{K}$ der zusammenhängenden Räume an und berücksichtige Satz 1.7 aus Kapitel 1.

Ein entsprechender Satz gilt für die Koinzidenz der Begriffe " $\mathcal{C}$ - diskontinuierlich" und "total diskontinuierlich" :

Satz 3.8 : Die Klasse der $\mathcal{C}$ - diskontinuierlichen Räume ist genau dann mit der Klasse der total diskontinuierlichen Räume identisch, wenn $\mathcal{C}$ eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist.

Beweis : Wegen $(\{D_\sim\})^+ = \mathcal{C}^+ \Leftrightarrow D\{D_\sim\} = D\mathcal{C}$ ist die Aussage auf Satz 3.7 zurückzuführen.

Das durch Satz 3.7 gewonnene Ergebnis führt noch zu folgenden Aussagen :

Satz 3.9 : Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse topologischer T_1 - Räume, die keine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist. Dann besitzt jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes, die nicht $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponente ist, unendlich viele $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten.

Beweis : Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes X ist Vereinigung

von $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten von X . Wäre K eine Zusammenhangskomponente, die nicht $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente ist, und wäre K Vereinigung endlich vieler $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten, so wäre K nicht zusammenhängend, weil die $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten abgeschlossen und disjunkt sind. Das ist aber ein Widerspruch. K muß also Vereinigung unendlich vieler $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten sein.

Entsprechend beweist man :

Satz 3.9': Es sei $\mathcal{C}$ eine Klasse topologischer T_1 -Räume, die keine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist. Dann ist jede zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes, die nicht $\mathcal{C}$ -zusammenhängend ist, unendlich.

Korollar: Für jede Klasse $\mathcal{C}$ topologischer T_1 -Räume gilt :

Jede endliche zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes ist $\mathcal{C}$ -zusammenhängend.

§ 4 Lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Räume

1. Zur Definition äquivalente Charakterisierungen

Zur Definition äquivalente Charakterisierungen sind schon durch Satz 4.1 und Satz 4.2 aus Kapitel 1 gegeben. Es ergibt sich aber aus Satz 4.1 noch folgendes Korollar :

Korollar 4.1: Ein lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Raum ist die topologische Summe seiner $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten.

Bemerkung 4.1: Die Umkehrung des Korollars ist falsch; denn sonst würde die Gültigkeit des folgenden Satzes implizieren, daß der lokale $\mathcal{C}$ -Zusammenhang eine Verallgemeinerung des $\mathcal{C}$ -Zusammenhangs ist, was aber bereits für $\mathcal{C} = \{D_p\}$ falsch ist.

Satz 4.1: Ein topologischer Raum X ist genau dann als topologische Summe seiner $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten darstellbar, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine

$\mathcal{C}$ - zusammenhängende Umgebung U_x von x gibt.

Beweis : 1) Es sei K eine $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponente von X und $x \in K$. Dann existiert nach Voraussetzung eine $\mathcal{C}$ - zusammenhängende Umgebung U_x von x . Wegen $U_x \cap K \neq \emptyset$ muß $U_x \subset K$ gelten. Da $x \in K$ beliebig war, ist K offen. X ist dann die topologische Summe seiner $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten.

2) Die Umkehrung ist trivial.

Für $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}\}$ erhält man noch eine algebraische Charakterisierung des lokalen $\mathcal{C}$ - Zusammenhangs mit Hilfe von Funktionenringen stetiger reellwertiger Funktionen:

Satz 4.2 : Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{X})$ ist genau dann lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend, wenn für jedes $O \in \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$ der kanonische Isomorphismus

$$C(O, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\mathcal{R}(O)}$$

besteht ⁷⁾.

Beweis : 1) Es sei $(X, \mathcal{X})$ lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend. Nach Satz 1.13 genügt es zu zeigen, daß $k_O : C(O, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{R}(O)}$ surjektiv ist.

Es sei $h \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}(O)}$, d.h. $h = (\lambda_{K(O)})_{K(O) \in \mathcal{R}(O)}$ mit $\lambda_{K(O)} \in \mathbb{R}$ für jedes

$K(O) \in \mathcal{R}(O)$. Da jedes $K(O) \in \mathcal{R}(O)$ offen in O ist und $O = \bigcup_{K(O) \in \mathcal{R}(O)} K(O)$ (das

Zeichen $\bigcup$ bedeutet disjunkte Vereinigung) ist, folgt, daß die Abbildung

$f : O \rightarrow \mathbb{R}$, die dadurch definiert ist, daß sie auf jedem $K(O) \in \mathcal{R}(O)$ den Wert $\lambda_{K(O)}$ annimmt, stetig ist und $k_O(f) = (\lambda_{K(O)})_{K(O) \in \mathcal{R}(O)} = h$ gilt.

2) Es sei $C(O) \cong \mathbb{R}^{\mathcal{R}(O)}$ ($O \in \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$) bzgl. der kanonischen Abbildung. Ist dann $K(O)$ eine $\mathbb{R}$ - Zusammenhangskomponente von $O \in \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$, so ist die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bigcup_{K^*(O) \in \mathcal{R}^*(O) \setminus \{K(O)\}} K^*(O) \\ 0 & \text{für } x \in K(O) \end{cases}$$

⁷⁾ d.h. wenn die in Definition 1.2 dieses Kapitels definierte kanonische Abbildung $k_O : C(O, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{R}(O)}$ ein Isomorphismus ist.

definierte Abbildung $f: O \rightarrow \mathbb{R}$ stetig nach Voraussetzung.

Dann ist $f^{-1}[\{1\}] = \bigcup_{K^*(O) \in \mathcal{K}(O) \setminus \{K(O)\}} K^*(O)$ abgeschlossen in O ,

also ist $K(O)$ offen in O und damit auch offen in X .

2. Klassifikation der lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Räume

Satz 4.3: Jeder lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Raum ist lokal zusammenhängend.

Beweis: Unter Verwendung von Satz 1.7 trivial.

Satz 4.4: $\mathcal{R}$ sei eine Unterklasse der Klasse der lokal zusammenhängenden Räume, die abgeschlossen ist gegenüber Bildung offener Unterräume, und $\mathcal{E}$ sei eine Klasse von T_1 -Räumen. $\mathcal{R}$ ist genau dann eine Unterklasse der Klasse der lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Räume, wenn $\mathcal{E}$ die folgende Eigenschaft besitzt: Jede Teilmenge M von $E \in \mathcal{E}$, für die ein $X \in \mathcal{R}$, eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow E$ und eine offene, nicht leere zusammenhängende Menge $O \subset X$ mit $M = f[O]$ existieren, ist einpunktig.

Beweis: 1) $\mathcal{R}$ sei eine Unterklasse der Klasse der lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Räume. Weiter sei M eine Teilmenge von $E \in \mathcal{E}$, für die ein $X \in \mathcal{R}$, ein $f \in C(X, E)$ und eine zusammenhängende Menge $O \in \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$ mit $f[O] = M$ existieren. Da X lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend ist, sind die $\mathcal{E}$ -Zusammenhangskomponenten von O offen. Insbesondere muß dann O $\mathcal{E}$ -zusammenhängend sein, weil O zusammenhängend ist. Dann ist $f[O] = M$ eine $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Teilmenge von $E \in \mathcal{E}$, und weil E $\mathcal{E}$ -diskontinuierlich ist, muß M einpunktig sein.

2) $\mathcal{E}$ habe die im Satz genannte Eigenschaft. Weiter seien $X \in \mathcal{R}$ und U_x eine Umgebung von $x \in X$. Da X lokal zusammenhängend ist, ist in U_x eine zusammenhängende Umgebung von x enthalten, sogar eine offene zusammenhängende Umgebung O_x von x (weil jede offene Teilmenge Vereinigung offener zusammenhängender Teilmengen ist). O_x ist dann aber $\mathcal{E}$ -zusammenhängend; denn ist $f \in C(O_x, E)$ mit $E \in \mathcal{E}$, so ist $f[O_x] = M$ einpunktig, weil $O_x \in \mathcal{R}$. Also ist f konstant. Damit ist der lokale $\mathcal{E}$ -Zusammenhang von X nachgewiesen.

Anwendungsbeispiele von Satz 4.4 :

- (1) Man wähle für $\mathcal{R}$ die Klasse der lokal zusammenhängenden Räume. Man erhält dann durch Satz 4.4 eine Bedingung für die Äquivalenz von lokalem Zusammenhang und lokalem $\mathcal{E}$ -Zusammenhang. Die Klasse $\mathcal{E}$ hat dann die Eigenschaft, daß jede zusammenhängende und lokal zusammenhängende Teilmenge M eines $E \in \mathcal{E}$ einpunktig ist. Insbesondere sind die Begriffe "lokaler Zusammenhang" und "lokaler $\mathcal{E}$ -Zusammenhang" äquivalent, wenn $\mathcal{E}$ eine Unterklasse der Klasse der total diskontinuierlichen Räume ist.
- (2) Man wähle für $\mathcal{R}$ die Klasse der irreduziblen Räume. Damit jeder irreduzible Raum lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend ist, kann für $\mathcal{E}$ eine Klasse topologischer Räume gewählt werden, deren irreduzible Komponenten einpunktig sind, insbesondere also eine Klasse von T_2 -Räumen.
- (3) Man wähle für $\mathcal{R}$ die Klasse der NOETHERschen Räume. Damit jeder NOETHERsche Raum lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend ist, kann für $\mathcal{E}$ eine Klasse topologischer Räume gewählt werden, deren irreduzible Komponenten einpunktig sind; denn ist $M \subset E$ mit $E \in \mathcal{E}$ so, daß ein NOETHERscher Raum X existiert, ein $f \in C(X, E)$ und ein nicht leeres, zusammenhängendes $O \subset X$ mit $f|_O = M$, so ist O NOETHERsch und besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten. $f[O] = M$ besteht also nur aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten. Da M zusammenhängend ist, muß M einpunktig sein. Die im Satz genannte Bedingung ist also erfüllt.
- (4) Man wähle für $\mathcal{R}$ die Klasse der lokal wegzusammenhängenden Räume. Damit jeder lokal wegzusammenhängende Raum lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend ist, kann für $\mathcal{E}$ eine Klasse von T_1 -Räumen gewählt werden, deren Wegkomponenten einpunktig sind.

Satz 4.5: Ein $\mathcal{E}$ -diskontinuierlicher Raum $(X, \mathcal{X})$ ist genau dann lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend, wenn er diskret ist.

Beweis: 1) Gilt $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$, so ist $(X, \mathcal{X})$ trivialerweise lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

2) Es sei $(X, \mathfrak{X}) \in \mathfrak{E}$ - diskontinuierlich und lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängend. Dann sind die $\mathfrak{E}$ - Zusammenhangskomponenten von X offen und einpunktig. Da jeder Punkt von X in einer $\mathfrak{E}$ - Zusammenhangskomponente liegt, sind folglich alle einpunktigen Mengen offen, also gilt $\mathfrak{X} = \mathfrak{P}(X)$.

Aus Satz 4.5 erhält man für $\mathfrak{E} = \{\mathbb{R}\}$ folgenden Spezialfall:

Satz 4.5': Ein vollständig regulärer Raum ist genau dann lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend, wenn er diskret ist.

Bemerkung 4.2: Aus Satz 4.5 folgt, daß kein $(Y, \mathfrak{Y}) \in \mathfrak{E}$ lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängend ist, wenn $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{P}(Y)$ ist. Für jede Klasse $\mathfrak{E}$ topologischer Räume, die lokal zusammenhängend, aber nicht diskret sind, bilden die lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängenden Räume eine echte Unterklasse der Klasse der lokal zusammenhängenden Räume. Ein Beispiel dafür sind die lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängenden Räume. Der Begriff " $\mathfrak{E}$ - Zusammenhang" ist keine Verallgemeinerung des Begriffes "lokaler $\mathfrak{E}$ - Zusammenhang"; denn es gibt lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängende Räume, die nicht $\mathfrak{E}$ - zusammenhängend sind, z.B. alle diskreten Räume mit mindestens zwei Elementen. Daß der Begriff "lokaler $\mathfrak{E}$ - Zusammenhang" keine Verallgemeinerung des Begriffes " $\mathfrak{E}$ - Zusammenhang" ist, ist für $\mathfrak{E} = \{\mathbb{D}_2\}$ bekannt, soll aber durch folgendes Beispiel noch einmal für $\mathfrak{E} = \{\mathbb{R}\}$ nachgewiesen werden:

Beispiel 4.1: Der in [2], chap. I, § 9, ex. 21) c) und § 11, ex. 1) angegebene abzählbare T_2 -Raum $(\mathbb{Q}^2, \tau)$ ist $\mathbb{R}$ - zusammenhängend, aber nicht lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend.

3. $\mathfrak{E}$ - Zusammenhangskomponenten

Die Frage, ob es unter nicht zu starken Einschränkungen an $\mathfrak{E}$ nicht triviale lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängende Räume mit beliebig vielen $\mathfrak{E}$ - Zusammenhangskomponenten gibt, beantwortet der folgende Satz:

Satz 4.6: $\mathfrak{E}$ sei eine Klasse topologischer T_1 -Räume, für die jeder irreduzible Raum lokal $\mathfrak{E}$ - zusammenhängend ist^{2b)}. Weiter sei $\aleph$ irgendeine Kardinalzahl.

^{2b)} vgl. Satz 4.4 und Anwendungsbeispiel (2)

Dann gibt es stets nicht triviale lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängende Räume $(X, \mathcal{X})$ mit $\text{card}(\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(X)) = \aleph$ ($\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(X)$: System der $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponenten von X).

Beweis : Es seien M eine Menge mit $\text{card}(M) \geq \text{card}(\aleph)$ und I eine Menge mit $\text{card}(I) = \aleph$. Weiter sei $X = \bigcup_{i \in I} M \times \{i\}$. Jedes $M \times \{i\}$ kann mit der

folgenden Topologie versehen werden :

$$\mathcal{M}_i = \{ (M \times \{i\}) \setminus E \mid E \subset M \times \{i\} \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset, M \times \{i\} \}$$

Die Räume $(M \times \{i\}, \mathcal{M}_i)$ sind irreduzibel und nach Voraussetzung lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängend. Versieht man X mit der Summenraumtopologie $\mathcal{X} = \sum_{i \in I} \mathcal{M}_i$, so ist,

wie später noch gezeigt wird, auch $(X, \mathcal{X})$ lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängend. Nach Konstruktion ist $\mathcal{X}$ weder diskret noch indiskret. Weiter ist jedes $M \times \{i\}$ eine $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente von X . Es sei nämlich K die $M \times \{i\}$ umfassende $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente von X . Da $M \times \{i\}$ in X offen und abgeschlossen ist und in K enthalten ist, so ist auch $M \times \{i\}$ in K offen und abgeschlossen. Da K aber zusammenhängend ist und $M \times \{i\} \neq \emptyset$ gilt, folgt $K = M \times \{i\}$. Ist umgekehrt K eine $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente von X , so hat K mit einem $M \times \{j\}$ einen nicht leeren Durchschnitt. Da $M \times \{j\}$ aber eine $\mathcal{C}$ -Zusammenhangskomponente ist, folgt $K = M \times \{j\}$. Damit ist gezeigt :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(X) = \{ M \times \{i\} \mid i \in I \}.$$

Die durch $f(i) = M \times \{i\}$ für alle $i \in I$ definierte Abbildung $f: I \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{C}}(X)$ ist dann bijektiv, also gilt

$$\text{card}(\mathcal{R}_{\mathcal{C}}(X)) = \text{card}(I) = \aleph.$$

4. Initiale Topologien

a) Die Produkttopologie

Es gilt der in Kapitel 1, Satz 4.8 bewiesene Produktsatz (Die Kategorie $\mathcal{R}$ der $\mathcal{C}$ -zusammenhängenden Räume ist offenbar abgeschlossen gegenüber Produktbildung). Daß beliebige Produkte lokal $\mathcal{C}$ -zusammenhängender Räume nicht lokal

$\mathcal{C}$ - zusammenhängend zu sein brauchen, zeigt das folgende Beispiel :

Beispiel 4.2 : Jedes unendliche Produkt lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängender Räume, die mindestens zwei $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten besitzen, kann kein lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängender Raum sein, weil sonst nach Satz 4.8 aus Kapitel 4 fast alle auch $\mathcal{C}$ - zusammenhängend sein müßten, also nur eine $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponente besitzen dürften.

b) Der projektive Limes

Daß der Begriff "lokaler $\mathcal{C}$ - Zusammenhang" sich nicht auf den projektiven Limes überträgt, zeigt das folgende Beispiel für $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}\}$.

Beispiel 4.3 : Es sei $(X, \mathcal{K})$ ein mindestens zweipunktiger, vollständig regulärer, zusammenhängender Raum. Nach Satz 0.8 ist $\varprojlim X_{R_\alpha}$ nach der schwächsten HAUSDORFFschen Äquivalenzrelation S homöomorph zur STONE-CECHschen Kompaktifizierung βX von X , also vollständig regulär. Die Räume X_{R_α} sind NOETHERsche $\mathbb{R}$ - zusammenhängende Räume (jedes X_{R_α} ist ein endlicher Raum) und folglich lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend. $\varprojlim X_{R_\alpha}$ ist aber kein lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängender Raum ; denn sonst wäre auch $\varprojlim X_{R_\alpha/S}$, wie noch gezeigt wird, lokal $\mathbb{R}$ - zusammenhängend und βX müßte nach Satz 4.5' die diskrete Topologie tragen, was aber nach Voraussetzung über X nicht möglich ist.

Bemerkung 4.3 : Ist $\mathcal{C}$ eine Klasse von T_1 - Räumen, so erkennt man die Bedeutung besonders "einfach gebauter" lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängender Räume für die Erweiterungstheorie topologischer Räume aus den Sätzen 0.6, 0.7 und 0.8. Die offenen, nicht leeren Mengen der Räume X_{R_α} sind nämlich endlich und besitzen folglich nur endlich viele $\mathcal{C}$ - Zusammenhangskomponenten, die dann nicht nur abgeschlossen in den offenen Mengen sind, sondern auch offen in X_{R_α} . Alle Räume X_{R_α} sind also lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängend.

c) Das reziproke Bild

Die Eigenschaft "lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängend" überträgt sich nicht auf das reziproke Bild ; denn es braucht nicht einmal ein Unterraum eines lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängenden Raumes lokal $\mathcal{C}$ - zusammenhängend zu sein, was für $\mathcal{C} = \{D_n\}$ bekannt ist und

für $\mathcal{E} = \{R\}$ nochmals durch das folgende Beispiel gezeigt wird :

Beispiel 4.4: Es mögen die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen gelten wie in Beispiel 4.3. Dann ist $\prod_{R_\alpha \in \mathcal{R}} X_{R_\alpha}$ lokal R -zusammenhängend, weil jedes X_{R_α}

R -zusammenhängend und lokal R -zusammenhängend ist. Der Unterraum $\varprojlim X_{R_\alpha}$ von $\prod_{R_\alpha \in \mathcal{R}} X_{R_\alpha}$ ist aber nach Beispiel 4.3 nicht lokal R -zusammenhängend.

Es gilt aber folgender Satz (vgl. Kap. I, Satz 4.9) :

Satz 4.7: Es sei $(X, \mathcal{X})$ lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend. Dann ist jedes $O \in \mathcal{X} \setminus \{\emptyset\}$ (versehen mit der Relativtopologie) lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

d) Das Supremum einer Menge von Topologien

Das Supremum (bzgl. der Inklusion) einer Menge lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$ braucht keine lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängende Topologie zu sein, was für $\mathcal{E} = \{R\}$ wie folgt einzusehen ist : Nach Satz 1.17 und Satz 4.4 ist jede Topologie auf einer nicht leeren Menge X Supremum lokal R -zusammenhängender Topologien auf X , während andererseits nicht jeder topologische Raum lokal R -zusammenhängend ist (z.B. $(R, \text{nat. Top.})$).

Insbesondere kann der Begriff "lokaler $\mathcal{E}$ -Zusammenhang" nicht verfeinerungstreu sein.

5. Finale Topologien

Satz 4.8: Es seien M eine Menge, $(X_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein System lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängender Räume und $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow M$ für jedes $\alpha \in I$ Abbildungen. Dann ist M versehen mit der feinsten Topologie $\mathcal{X}$, für die alle f_α stetige Abbildungen sind, lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

Korollare: 1) Jeder Quotientenraum eines lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängenden Raumes ist lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

2) Der Summenraum lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängender Räume ist lokal $\mathcal{E}$ -zusammenhängend.

3) Der induktive Limes eines induktiven Systems lokal $\mathfrak{E}$ -zusammenhängender Räume (bzgl. einer geordneten, absteigend filtrierenden Indexmenge) ist lokal $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend.

4) Das Infimum eines Systems lokal $\mathfrak{E}$ -zusammenhängender Topologien auf einer Menge $X \neq \emptyset$ ist eine lokal $\mathfrak{E}$ -zusammenhängende Topologie auf X .

Beweis: Es seien $O \in \mathfrak{M} \setminus \{\emptyset\}$ und K eine $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente von O . Also ist $f_\alpha^{-1}[K] \subset f_\alpha^{-1}[O]$ für alle $\alpha \in I$. Falls $f_\alpha^{-1}[K] = \emptyset$ ist, so folgt $f_\alpha^{-1}[K] \in \mathfrak{X}_\alpha$. Falls $f_\alpha^{-1}[K] \neq \emptyset$ ist, so gilt es ebenfalls zu zeigen, daß $f_\alpha^{-1}[K] \in \mathfrak{X}_\alpha$ ist. Im letzteren Fall ist $f_\alpha^{-1}[K]$ Vereinigung von $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponenten von $f_\alpha^{-1}[O]$; denn ist $x \in f_\alpha^{-1}[K]$ und K_x^α die x enthaltende $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponente von $f_\alpha^{-1}[O]$, so ist $f_\alpha[K_x^\alpha] \subset M$ nach Satz 1.2 aus Kapitel I $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend und da $f_\alpha(x) \in f_\alpha[K_x^\alpha] \cap K$, also $f_\alpha[K_x^\alpha] \cap K \neq \emptyset$ ist, folgt nach Satz 1.3 aus Kapitel I, daß $f_\alpha[K_x^\alpha] \cup K$ $\mathfrak{E}$ -zusammenhängend ist und wegen der Maximalität von K gilt $f_\alpha[K_x^\alpha] \subset K$, also $K_x^\alpha \subset f_\alpha^{-1}[K]$ und $\bigcup_{x \in f_\alpha^{-1}[K]} K_x^\alpha = f_\alpha^{-1}[K]$. Da die $\mathfrak{E}$ -Zusammenhangskomponenten K_x^α nach Voraussetzung über X_α offen in X_α sind, folgt,

daß $f_\alpha^{-1}[K]$ offen in X_α ist. Damit ist für jedes $\alpha \in I$ gezeigt, daß $f_\alpha^{-1}[K] \in \mathfrak{X}_\alpha$ gilt. Also ist $K \in \mathfrak{M}$.

Bemerkung 4.4: 1) Die Umkehrung des Quotientensatzes gilt nicht; denn beispielsweise ist für $\mathfrak{E} = \{\mathbb{R}\}$ der Raum $(\mathbb{R}, \text{nat. Top.})$ nicht lokal $\mathbb{R}$ -zusammenhängend, während der Quotientenraum von $\mathbb{R}$ nach der von einer endlichen offenen Überdeckung α erzeugten Äquivalenzrelation R_α (vgl. Vorbereitungen 2) dieses Kapitels) lokal $\mathbb{R}$ -zusammenhängend ist, weil er als endlicher T_0 -Raum NOETHERsch ist.

2) Die Umkehrung des Summensatzes ist wegen Satz 4.7 gültig, aber eine Trivialität.

3) Das Korollar 4) ist keine Folge der Invarianz des Begriffes "lokaler $\mathfrak{E}$ -Zusammenhang" gegenüber Vergrößerung der Topologie; denn eine

solche Invarianz existiert nicht. Sie hätte nämlich zur Folge, daß jeder topologische Raum lokal $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend sein müßte, weil jede mit der diskreten Topologie versehene Menge lokal $\mathfrak{C}$ -zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.5: Nach ISBELL [12] heißt eine topologische Eigenschaft E "coreflective", wenn zu jedem Raum X ein Raum X_E mit der Eigenschaft E und eine bijektive stetige Abbildung $f: X_E \rightarrow X$ existiert, so daß zu jedem Raum Y mit der Eigenschaft E und zu jeder stetigen Abbildung $g: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung $\bar{g}: Y \rightarrow X_E$ existiert, derart, daß das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_E & \xrightarrow{f} & X \\ \bar{g} \swarrow & & \nearrow g \\ & Y & \end{array}$$

kommutativ wird. Man kann zeigen, daß für jede Komponentenkategorie

$\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{T}$ die Klasse der lokalen $\mathfrak{K}$ -Räume "coreflective" ist.

Zu diesem Ergebnis gelangt man ohne besondere Schwierigkeiten durch direkte Verallgemeinerung einer Schlußweise von GLEASON [8], der dieses Resultat für lokal zusammenhängende Räume (und auch für lokal wegzusammenhängende Räume) erzielt hat.

Literatur

- [1] Bourbaki, N. : Théorie des ensembles, chap. 4,
Paris 1957.
- [2] Bourbaki, N. : Topologie générale, chap. 1, 2,
Paris 1961.
- [3] Bourbaki, N. : Algèbre commutative, chap. 1, 2,
Paris 1961.
- [4] Engelking, R. und S. Mrówka : On E-compact spaces, Bull. Acad.
Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 6, 429 - 436, (1958).
- [5] Est, W. T. van, und H. Freudenthal : Trennung durch stetige Funktionen
in topologischen Räumen, Indagationes Math. 13, 359 - 368, (1951).
- [6] Flachsmeyer, J. : Zur Spektralentwicklung topologischer Räume,
Math. Ann. 144, 253 - 274, (1961).
- [7] Gillman, L. und M. Jerison : Rings of continuous functions,
Princeton 1960.
- [8] Gleason, A.M. : Universal locally connected refinements,
Illinois J. Math. 7, 521 - 531, (1963).
- [9] Herrlich, H. : $\mathfrak{C}$ -kompakte Räume, Habilitationsschrift,
II. Math. Inst., FU Berlin, (1965).
- [10] Herrlich, H. : Wann sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant ?,
Math. Zeitschrift 90, 152 - 154, (1965).
- [11] Hewitt, E. : On two problems of Urysohn, Ann. Math. 47
503 - 509, (1946).
- [12] Isbell, J. R. : Uniform spaces, Am. Math. Soc.,
Providence, 1964.
- [13] Kowalsky, H.-J. : Topologische Räume, Basel, 1961.
- [14] Mrówka, S. und W. Pervin : On uniform connectedness,
Proc. Am. Math. Soc. 15, 446 - 449, (1964).
- [15] Mrówka, S. : A property of Hewitt-extension $\cup X$ of topological
spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 6,
95 - 96, (1958).

- [16] Novák, J. : Regular space, on which every continuous function is constant, *Časopis Pěst. Mat. Fys.* 73, 58 - 68, (1948).
- [17] Pospíšil, B. : Trois notes sur les espaces abstraites, *Spisy vydávane přírodovědeckou fakultou Masarykovy University*, Čís. 249, Rok 1937.
- [18] Tychonoff, A. : Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Math. Ann.* 102, 544 - 561, (1930).
- [19] Urysohn, P. : Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.* 94, 262 - 295, (1925).

Lebenslauf des Verfassers

Am 12. Juni 1940 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Walter Preuß und dessen Ehefrau Gertrud Preuß geb. Pfeiffer in Berlin geboren. Ab Ostern 1946 besuchte ich in Berlin-Neukölln die Grundschule und trat 1952 in die Oberschule Technischen Zweiges (Mittelschule) und 1953 in die Oberschule Wissenschaftlichen Zweiges (Gymnasium) ein. Dort legte ich 1959 im Albert-Schweitzer-Gymnasium die Reifeprüfung ab.

Seit dem Sommersemester 1959 studierte ich an der Freien Universität Berlin die Fächer Mathematik, Physik und Chemie. Meine Lehrer während des Hochschulstudiums waren in Mathematik die Professoren Dinghas, Grottemeyer, Pachale, Ringel und Stöhr sowie Dr. Engel, in Physik die Professoren Honerjäger, Lassen, Ludwig und Päsler sowie Dr. Lichte, in Chemie die Professoren Jahr, Lautsch und Schenk sowie Dr. Gnichtel.

Die Diplomvorprüfung bestand ich 1961, die Diplomhauptprüfung in Mathematik 1966.

Seit Oktober 1966 bin ich an der Technischen Universität Berlin als wissenschaftlicher Mitarbeiter angestellt.

Die vorliegende Arbeit entstand unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Grottemeyer.

